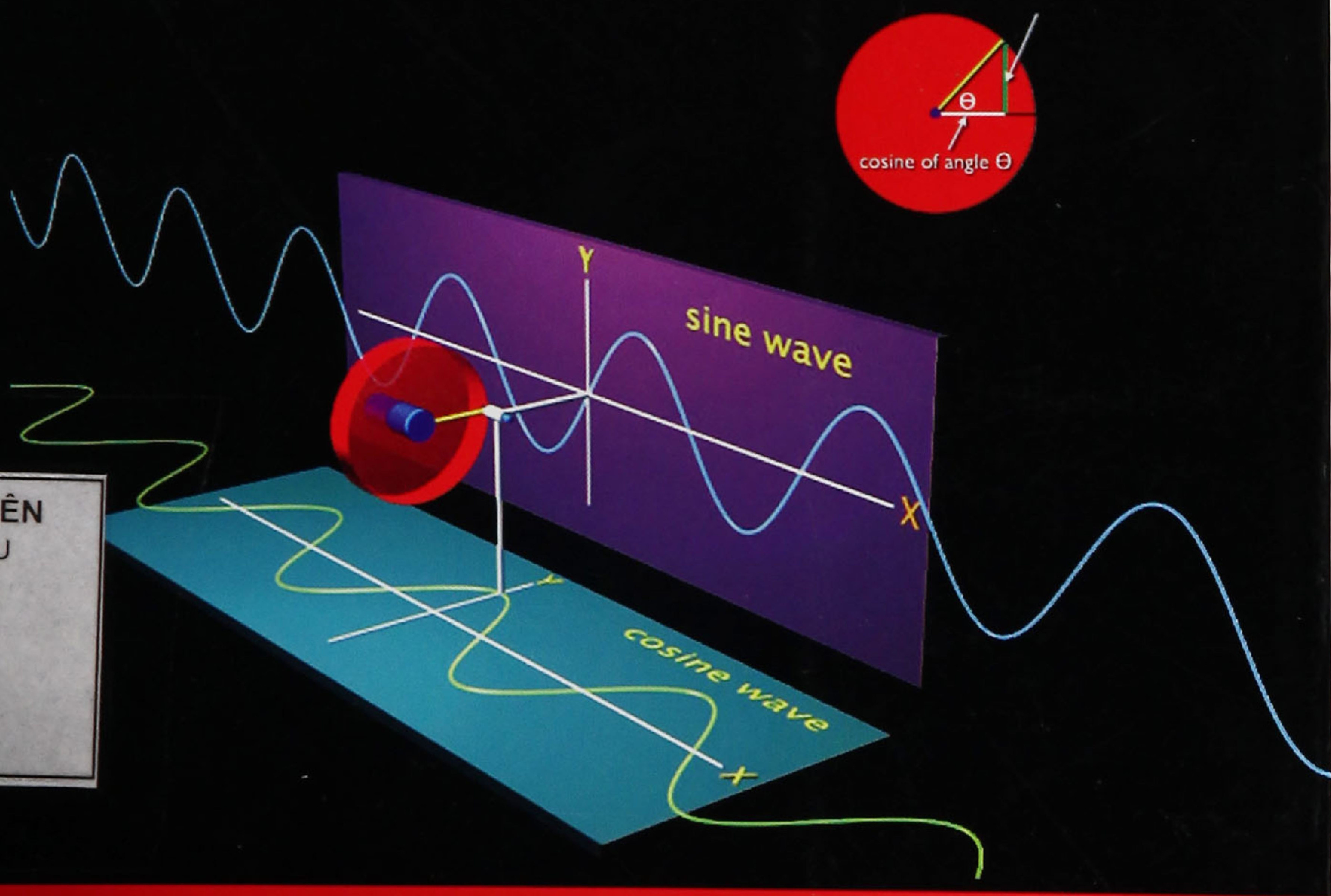
guyễn Bá Đô

NHỮNG CÂU CHUYỆN lý thú về Hàm số



Nhà xuất bản Dân Trí

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này kể *Những câu chuyện lý thú về hàm số*. Tuy vậy, chúng tôi không có ý định và cũng không thể mô tả một cách hoàn chỉnh, liền mạch từng vấn đề của hàm số. Đó là nhiệm vụ của sách giáo khoa.

Trong quá trình từ dạy đến học, từ học đến hiểu, từ hiểu đến áp dụng, từ áp dụng đến sáng tạo đòi hỏi mỗi người phải tìm tòi, năng động. Sách giáo khoa chỉ cung cấp những điều cốt yếu, cho nên muốn hiểu đầy đủ và sâu sắc hơn từng vấn đề cần đọc các sách bổ khuyết. Và đây là cuốn sách bổ khuyết như vậy về hàm số.

Sách phục vụ học sinh, giáo viên phổ thông và những người yêu thích toán.

Tác giả

Cùng một tác giả

NGUYỄN BÁ ĐÔ

1. Những câu chuyện lý thú về xác suất
2. Những câu chuyện lý thú về phương trình
3. Những câu chuyện lý thú về logic
4. Những câu chuyện lý thú về giới hạn
5. Những câu chuyện lý thú về hàm số
6. Những câu chuyện lý thú về hình học
7. Một số vấn đề toán học chưa giải quyết được

1. MỘT THẾ GIỚI CHUYỂN ĐỘNG VĨNH HẰNG

Theo các nhà khoa học, Trái Đất được tách ra từ Mặt Trời cách nay 4,6 tỷ năm. Trái Đất cách Mặt Trời $149,56.10^6$ km.

Theo các nhà khoa học, trong đó có nhà địa chất Lucann Becker và các đồng nghiệp ở Trường Đại học Washington, cách đây 251 triệu năm (cuối kỷ Pecmi), một thiên thạch đã đâm vào Trái Đất làm toàn bộ 15000 giống của loài bọ ba thùy, đã từng thống trị thế giới, bị tiêu diệt hoàn toàn, hơn 90% sinh vật biển, 70% động vật có xương sống và đa số thực vật sống trên cạn bị diệt vong. Các nhà khoa học ước tính, thiên thạch này có kích thước 6,5 - 13km nhưng vẫn chưa xác định được vị trí va chạm. Sau đó, sự sống trên Trái Đất lại phát triển trong thời kỳ mới, trải qua kỷ Triat, kỷ Dura, kỷ Crêta,...

Cách đây khoảng 65 triệu năm, thiên thạch Chicxulub có kích thước như thiên thạch vừa nêu đã rơi xuống vùng đất nay là bán đảo Yntaian (thuộc Mêhicô) và gây ra sự diệt chủng loài khủng long. Sau đó, sự sống trên Trái Đất lại phát triển, con người đã đạt được trí tuệ và văn minh cao như ngày nay.

Ngày 2/9/2003 các nhà thiên văn Mỹ đã phát hiện tiểu hành tinh 2003 QĐ47 đường kính khoảng 1,1km đang di chuyển với tốc độ khoảng 32km/s, có khả năng đâm vào Trái Đất năm 2014 nhưng nguy cơ chỉ 1/909000. Nhờ xác định niên đại các "hố va đập" người ta đã xác định được là khoảng 26 triệu năm lại có một lần Trái Đất bị diệt chủng.

Song, mặc dù loài người đã có những phát hiện vô cùng to lớn, nhưng vẫn chưa biết được chính xác vũ trụ xung quanh chúng ta ra đời như thế nào và sẽ kết thúc ra sao.

Theo tính toán của các nhà khoa học thì vũ trụ tồn tại đã hơn 15 tỷ năm. Vũ trụ hợp bởi hàng tỷ "thiên hà" (galaxy). Mỗi thiên hà là một tập hợp hàng trăm tỷ thiên thể. Riêng thiên hà trong đó có Thái Dương Hệ, Mặt Trời, Trái Đất... thì Pháp gọi là Voie Lactée (con đường sữa), còn ta gọi là dải Ngân Hà (vì ban đêm nhìn như một đám mây màu trắng). Ngân Hà có khoảng 100 triệu thiên thể.

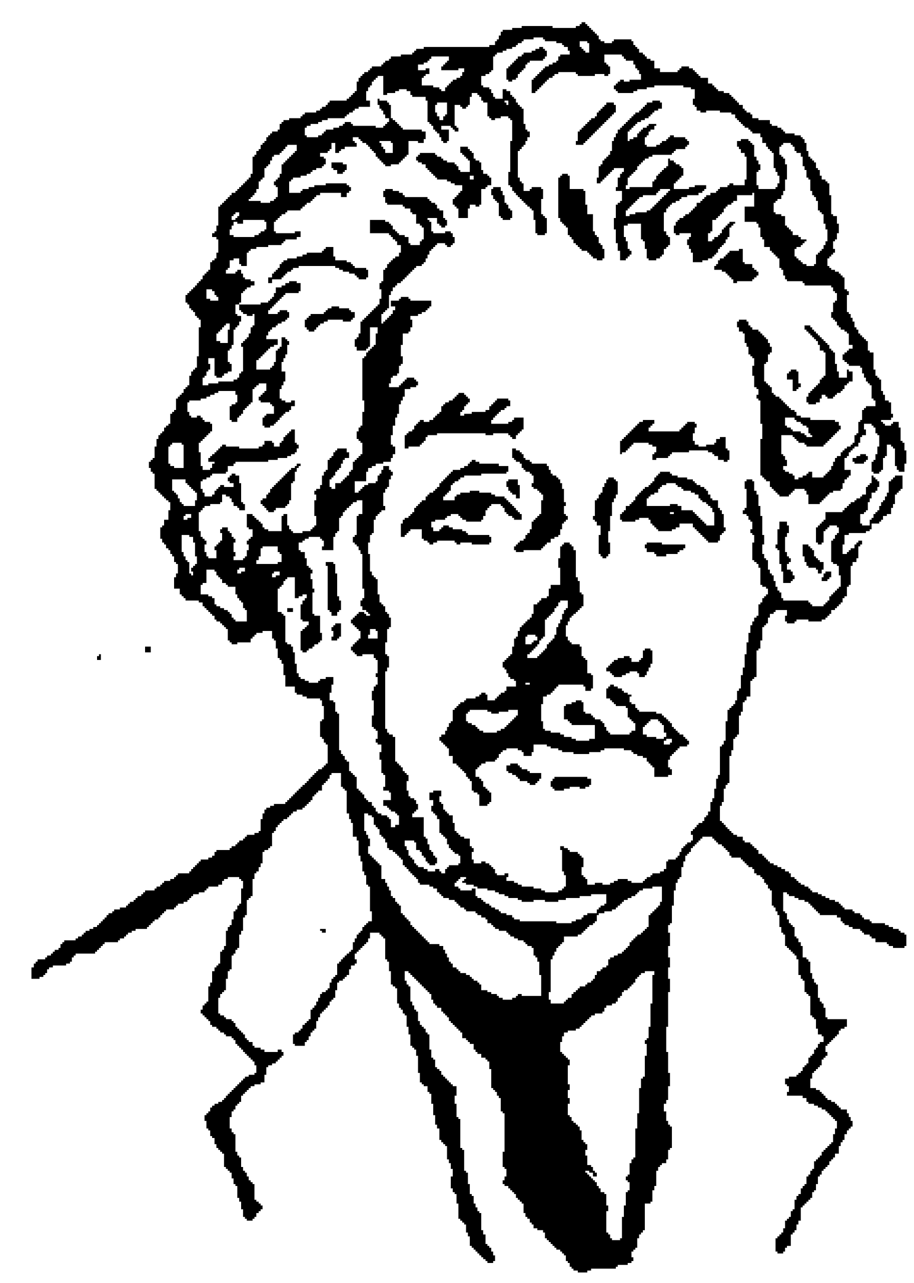
N.Copernic

Trước thời kỳ Phục Hưng người ta cho rằng, Trái Đất là trung tâm của vũ trụ và Mặt Trời quay xung quanh Trái Đất. Năm 1543, tiến sĩ luật, nhà thiên văn vĩ đại Nicolas Copernic (19/2/1473 - 25/4/1543) người Ba Lan đã khám phá ra rằng, Trái Đất và một số hành tinh khác quay xung quanh Mặt Trời và vì vậy ông đã bị giáo hội thiêu sống. Hơn nửa thế kỷ sau (năm 1603), nhà bác học vĩ đại Galieo Galilei (16/2/1564 - 8/1/1642) người Italia lại khẳng định điều này. Sau đó, ta biết được rằng Trái Đất quay xung quanh Mặt Trời theo quỹ đạo hình elíp trong 1 năm và Trái Đất còn quay quanh trục của nó trong 1 ngày đêm.

G. Galilei

Ngày nay, Hệ Mặt Trời đã phần nào được lý giải. Người ta đã biết được hành tinh xa nhất trong Hệ Mặt Trời là sao Diêm Vương, cách Mặt trời 9508.10^6 km. Tuy nhiên, vũ trụ đang còn nhiều điều bí ẩn mà loài người chưa biết được. Chẳng hạn: Vũ trụ là vô hạn hay hữu hạn? Còn có những vũ trụ khác đang tồn tại như vũ trụ của chúng ta không? Đâu là trung tâm của vũ trụ?...

Trong thuyết tương đối (công bố năm 1915) nhà bác học nổi tiếng Albert Einstein (14/3/1879 - 18/4/1955) người Đức gốc Do Thái cho rằng, vũ trụ là không gian và thời gian, nó không ở trong cái gì cả, là duy nhất, không có tâm và không có bờ.



A.Einstein

Hiện nay, nhiều người vẫn nghiêng về giả thiết vũ trụ có hình phẳng và vẫn không ngừng mở rộng ra vô tận như khi mới sinh ra từ vụ nổ lớn (Big Bang).

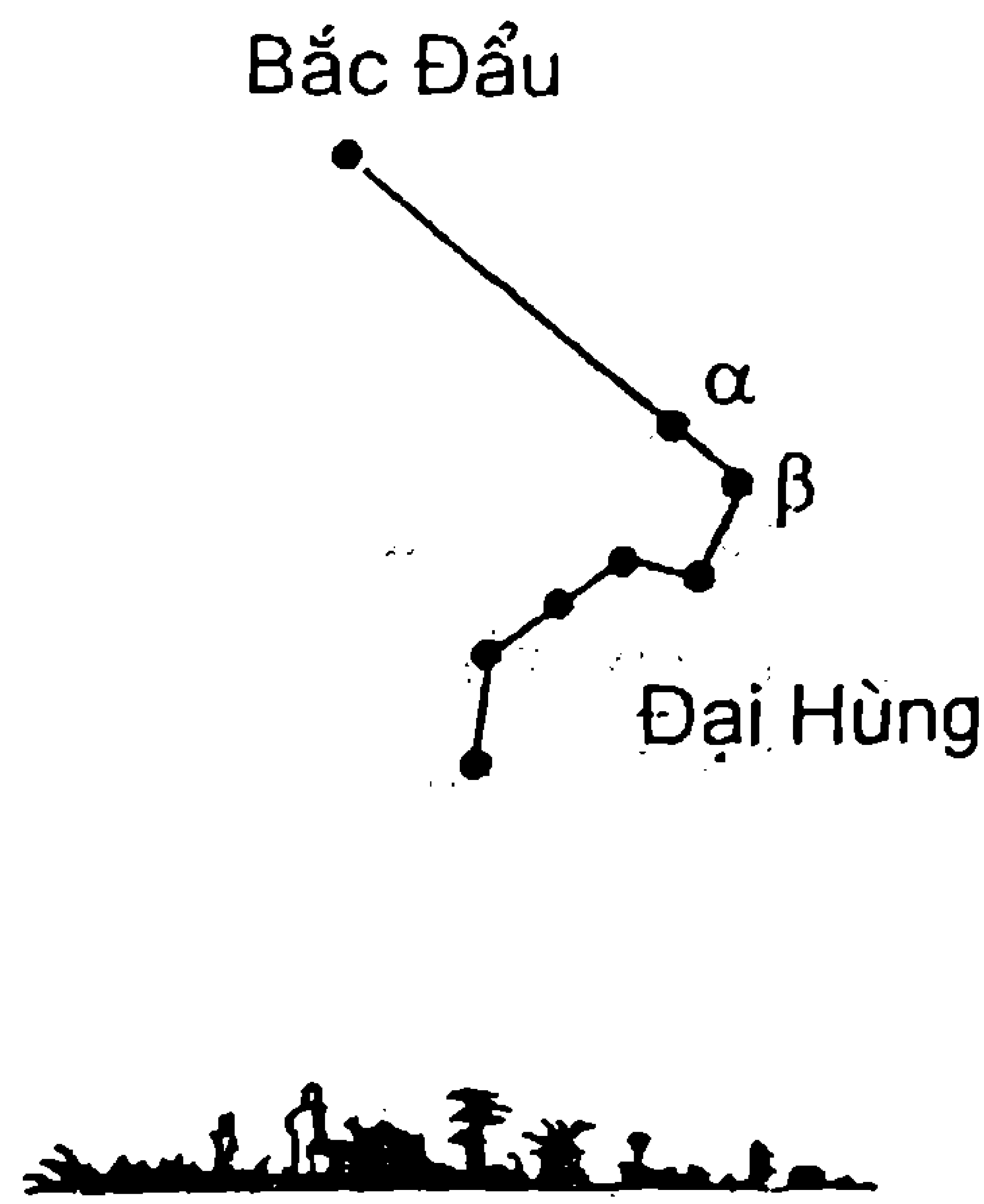
Tuy nhiên, ai cũng công nhận là vạn vật đang biến đổi trong dòng sông dài thời gian. Từ quá khứ biến đổi đến hiện tại, lại từ hiện tại biến đổi đến tương lai. Đứng yên chỉ là tạm thời, vận động mới là vĩnh hằng!

Nhìn bầu trời lấp lánh muôn vàn vị sao, con người xưa đã nghĩ ra nhiều huyền thoại. Họ tưởng tượng rằng, Thiên Đình cũng có những phố xá phồn hoa như thế gian này. Một số hành tinh lấp lánh kia có nhiệm vụ canh giữ từng vị trí của Thiên Cung và chúng đứng yên mãi mãi. Về sau người ta cho rằng, các hành tinh này khác với Mặt Trăng và các hành tinh chuyển động. Các hành tinh đứng yên này gọi là "hằng tinh". Thực ra gọi là hằng tinh cũng không xác đáng, chỉ vì chúng ở cách ta quá xa đến nỗi bất kỳ sự chuyển động nào giữa chúng đều chậm tới mức khiến chúng ta không nhận thấy được.

Bắc Đẩu Thất Tinh là tên gọi theo thiên văn cổ của Trung Quốc để chỉ chòm sao khá sáng có 7 sao mà ta thường gọi là chòm Bắc Đẩu Lớn (chòm Gấu Lớn) hay chòm Đại Hùng, chòm sao này giống chiếc gáo.

Sao Bắc Đẩu chỉ cách thiên cực Bắc 1 độ. Nó là sao sáng nhất trong chòm Bắc Đẩu Nhỏ (chòm Gấu Nhỏ) hay chòm Tiểu Hùng. Chòm sao này cũng giống chiếc gáo, người Việt cổ gọi là chòm Bánh Lái (vì nó giống bánh lái thuyền).

Muốn tìm sao Bắc Đẩu ta kéo dài hai sao miệng gáo α và β (về phía α) của chòm Đại Hùng ra 5 lần khoảng cách αβ (hình 1-1).



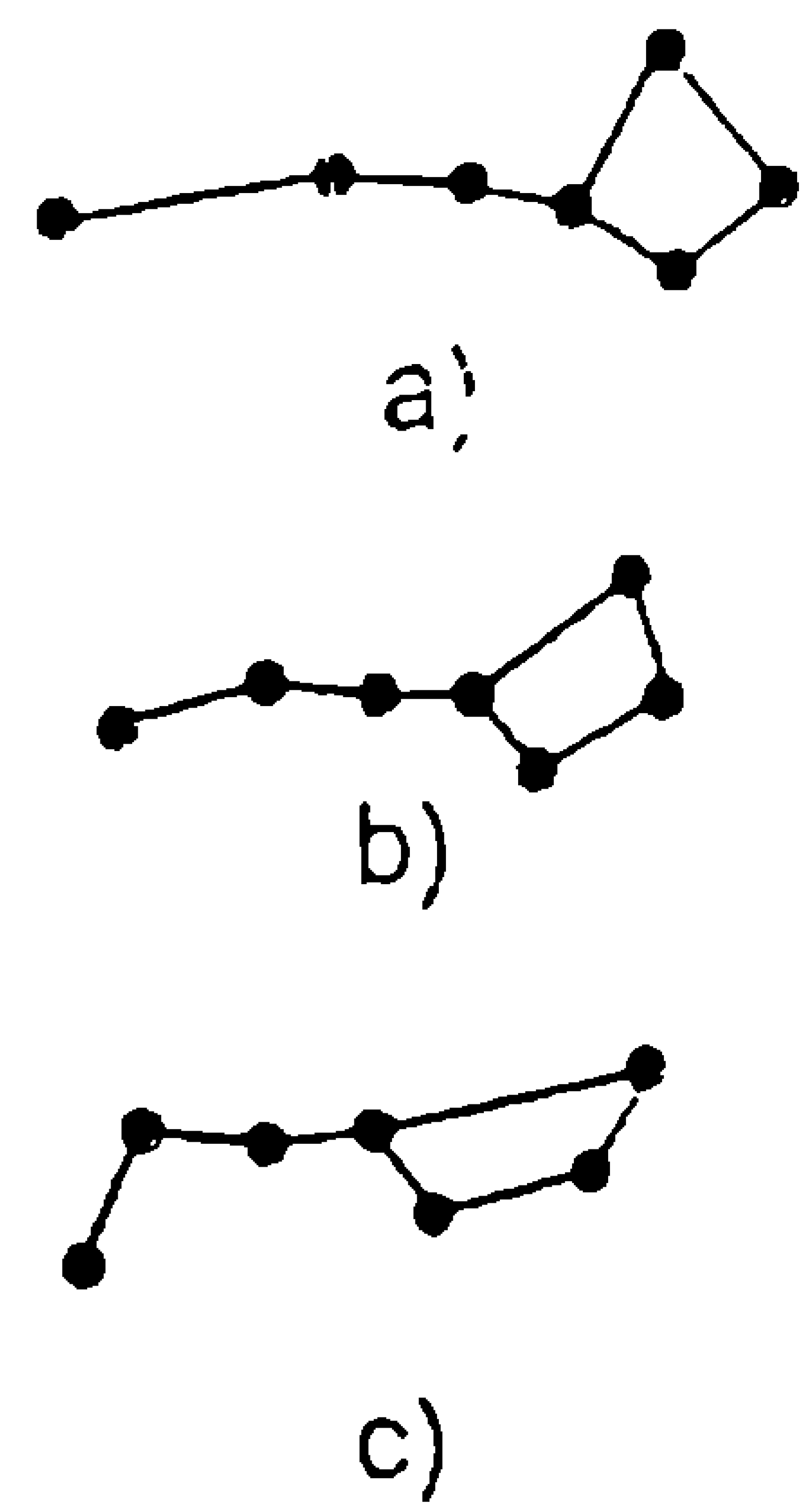
Hình 1-1

Cuộc đời con người quá ngắn ngủi so với sự tồn tại của vũ trụ. Song điều may mắn là, sự tiến triển của khoa học hiện đại làm cho chúng ta có khả năng xác định quá khứ và dự đoán chính xác tương lai.

Hình 1-2 là các dạng của chòm sao Đại Hùng: a) 10 vạn năm trước; b) hiện nay và c) 10 vạn năm sau. Như vậy, hình dạng chòm sao Đại Hùng không giống nhau qua các thời kỳ.

Không chỉ Trời biến động, mà Đất cũng biến động: Động đất, núi lửa phun, địa tầng nứt nẻ, băng chuyển dịch... Các nhà khoa học khẳng định rằng, ở thời kỳ có một thiên thạch lớn đâm vào Trái Đất cách đây 251 triệu năm, các lục địa đang liền nhau thành một khối, gọi là Pangée và "trôi nổi" trong đất, như mảng bè bồng bềnh trên nước.

Đầu thế kỷ XX, nhà địa lý học và khí tượng học trẻ A.Wegener (1880 - 1930) người Đức đã phát hiện ra rằng, hai bờ Đại Tây Dương, đặc biệt là đường viền bờ biển châu Phi và Nam Mỹ rất giống nhau. Hiện tượng này chứa đựng điều bí ẩn gì đây?



Hình 1-2

Một hôm A.Wegener đang đọc báo trong thư phòng, một sự cố ngẫu nhiên đã kích thích linh cảm của ông. Do ghế lâu ngày chưa sửa, một mối nối đột nhiên bị gãy, ông bị ngã ngửa, tờ báo cầm trên tay bị xé đứt đôi. Sau giây lát sự cố này, khi A.Wegener nhìn lại hai nửa tờ báo cầm trên hai tay, ông liền bừng tỉnh. Dòng suy nghĩ quanh quẩn trong đầu ông lâu nay, nhờ hiện tượng vừa xảy ra, đã bật ra ý tưởng: Các lục địa trên

A.Wegener

Trái Đất vốn liền một khối, về sau do một nguyên nhân nào đó mà rạn nứt, tách ra.

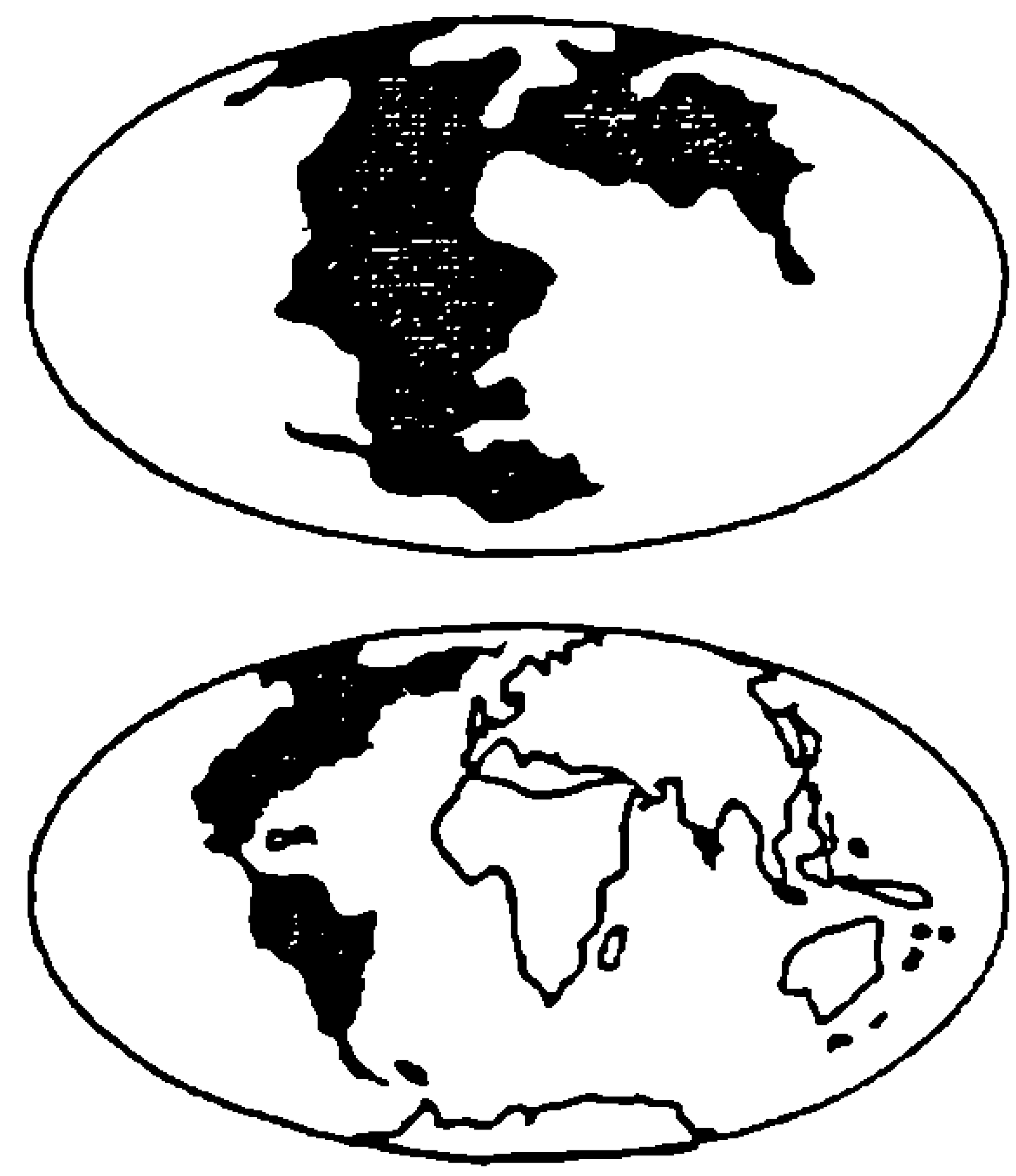
Sau đó, A.Wegener đã vượt biển đến hai bờ Đại Tây Dương tìm chứng cứ cho lý thuyết của mình. Năm 1912, "Học thuyết lục địa di chuyển" (còn gọi là "Học thuyết lục địa trôi dạt") đã ra đời.

A.Wegener cho rằng, Nam Mỹ "lồng khít" vào vùng vịnh Guinée và Đại Tây Dương sinh ra do sự tách rời của châu Âu và châu Mỹ.

Năm 1915, A.Wegener công bố cuốn *Nguồn gốc các lục địa và đại dương* trong đó ông đưa ra giả thiết về sự trôi dạt của các lục địa, đặt nền móng cho thuyết Kiến tạo mảng trong địa chất hiện đại. Theo đó, vỏ Trái Đất được chia 15 mảng và chịu tác dụng của các dòng chuyển dịch của vật chất bên trong lòng Trái Đất do đối lưu nhiệt. Vật chất phía dưới mảng có khối lượng riêng lớn hơn mảng, có tên gọi là macma. Các mảng có khi va chạm trực đối, đùn đất đá lên thành núi, có khi trượt tạo thành khe nứt dài, chẳng hạn vết nứt San Andrei chạy dài từ thành phố San Francisco qua bang Califonia ở Mỹ, đến biên giới Mêhico, có khi tách rời nhau, xuất hiện núi lửa phun trào. Sự trôi dạt lục địa xảy ra rất chậm, vài cm/năm.

Thật ra, nhận xét về sự ăn khớp lạ lùng của các lục địa đã được nhà triết học và nhà tự nhiên học Francis Bacon (1561 - 1626) người Anh nêu ra năm 1620 nhưng chưa luận giải được. Năm 1910 nhà khoa học Fréderic Winslow Taylor (1856 - 1915) người Mỹ đưa ra phán đoán về sự trôi dạt các lục địa nhưng chưa thật hoàn chỉnh. Dư luận thực sự chấn động khi cuốn sách của A. Wegener ra đời, nhờ lập luận có hệ thống. Nhưng mãi tới đầu những năm 1960 người ta mới xem xét tới ý tưởng thiên tài này.

Mùa hè năm 1974, một cuộc khảo sát của Pháp - Mỹ đã kiểm chứng tại chỗ sự tồn tại "vết nứt" đại dương ngăn cách hai lục địa. Sau đó, với tên gọi "Học thuyết kiến tạo mảng" đã được phần lớn các nhà khoa học chấp nhận.



Với ánh sáng của "Học thuyết kiến tạo mảng" người ta cho rằng, đôi khi những mảng trượt lên nhau hoặc va đập vào nhau, nhưng ở Nhật Bản, nơi ba mảng gặp nhau ngoài biển Tokyo, tạo ra những ứng lực kinh khủng, gây nên những trận động đất và những vụ núi lửa phun trào. Hiện tượng này được các nhà khoa học Pháp - Nhật Bản nghiên cứu vào giữa năm 1985 trong "Chương trình hoạt động Kaiko".

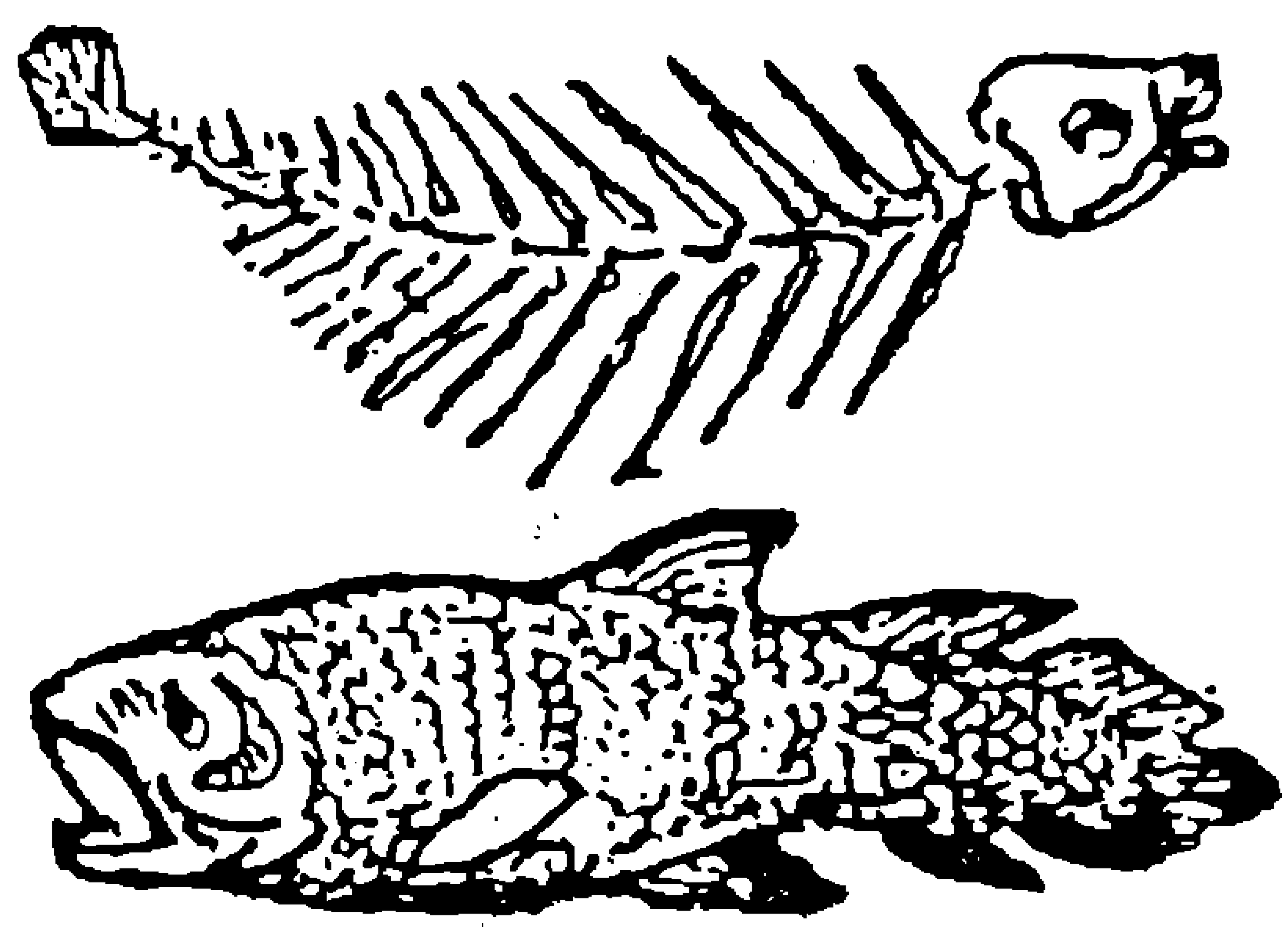
Ngày nay "Học thuyết kiến tạo mảng" được cả thế giới công nhận. Theo đo đạc mới nhất của Cục Hàng không vũ trụ Mỹ cho biết, hiện nay hiện tượng di chuyển lục địa vẫn đang tiếp diễn như Bắc Mỹ đang rời xa châu Âu với tốc độ 1,52cm mỗi năm, còn Ôxtrâylia lại trôi về phía quần đảo Hawai với tốc độ 6,858cm mỗi năm.

Vạn vật trong thế gian đều đang biến đổi. Do vậy, không đổi (không biến đổi, bất biến) đã khiến người ta nghi hoặc. Câu chuyện sau đây là một ví dụ.

Ngày 22/12/1938, gần quần đảo Comoros ở châu Phi, các ngư dân đã bắt được một con cá quái dị. Toàn thân con cá được khoác bằng vảy hình lục giác và mọc 4 cái "chân thịt" dài tới

1,33m, đuôi giống như ngọn giáo của các dũng sĩ thời Cổ Đại. Lúc đó các ngư dân không để ý tới những điều khác thường này, bởi vì hàng ngày họ cũng gặp nhiều trường hợp như vậy. Cho nên con cá quái dị này cùng chung số phận như bao con cá khác: giết lấy thịt ăn!

May thay, tại bảo tàng vùng đó có một nữ nhân viên quản lý tên là Latimei rất hăng say với việc tìm hiểu các loài cá. Khi cô ta nghe được tin có con cá quái dị, liền vội đến nhưng chỉ còn đống xương và da thừa. Tuy vậy, cô vẫn cẩn thận nhặt tất cả các thứ còn lại rồi gửi cho một người có tiếng tăm về ngư loại học lúc đó là giáo sư Smit ở Trường đại học Lots (Nam Phi).



Sau khi giáo sư đọc thư và xem xét mẫu vật, bỗng ông ngớ người ra, bởi vì loài cá có đuôi giống như ngọn giáo này có tên là Coelacanth, đã tuyệt chủng bảy mươi triệu năm trước rồi. Các nhà khoa học chỉ tìm thấy nó ở các hoá thạch. Sự việc này đã làm giáo sư Smit hết sức kinh ngạc. Thế là ông sẵn sàng bỏ ra 10 vạn đồng tiền vàng để thưởng cho ai biếu ông con cá đuôi giáo thứ 2.

Thời gian trôi qua đã 14 năm, mãi đến ngày 20/12/1952, giáo sư Smit mới nhận được bức điện báo: "Đã bắt được con cá ông cần"! Giáo sư đọc bức điện xong, vui mừng vô cùng, liền đi ngay đến đó. Khi giáo sư đưa hai tay run run mở bao bảo quản, một dòng nước mắt trào ra ở khoé mắt ông,...

Nhưng vì sao một con cá có đuôi giống như ngọn giáo lại làm giáo sư quan tâm đặc biệt như vậy? Hoá ra con cá có đuôi giống như ngọn giáo bắt được bây giờ so với hoá thạch có niên đại bảy mươi triệu năm trước gần như không thấy có sự biến đổi khác thường nào! Cá có đuôi giống như ngọn giáo trải qua bảy mươi triệu năm vẫn không bị tuyệt chủng, cũng không tiến hoá. Sự mê hoặc của "không đổi" này chắc chắn là sự thách thức với học thuyết tiến hoá của "biến đổi". Rút cuộc học thuyết của nhà di truyền Charles Darwin (12/2/1809 - 1882) người Anh phải sửa đổi, hay là do những nguyên nhân khác sâu xa hơn? Cuộc tranh luận đến nay vẫn chưa đến hồi kết thúc.

Ch. Darwin

Chúng ta vừa nói, tất cả các đại lượng của thế giới này đều biến đổi theo sự biến đổi của thời gian. Nói chung, nếu trong một quá trình tiến hoá nào đó có hai đại lượng biến đổi x và y, mà đối với mỗi trị số xác định trong phạm vi biến thiên của đại lượng biến đổi x, có tương ứng duy nhất với một trị số của đại lượng biến đổi y thì ta nói y là hàm số của đại lượng biến đổi x:

$$y = f(x) \qquad (1\text{-}1)$$

Đại lượng biến đổi x gọi là đại lượng tự biến, đại lượng biến đổi y gọi là đại lượng biến đổi theo. Thời gian là đại lượng tự biến nguyên thuỷ nhất, các đại lượng khác là đại lượng biến đổi theo.

Hàm số là một trong những khái niệm quan trọng nhất của toán học ở bậc trung học. Khái niệm hàm số xuất hiện là sự tất yếu của tư duy loài người từ "tĩnh" sang "động". Khi người ta thử miêu tả thế giới vận động và thay đổi thì sự suy nghĩ tới các đại lượng biến đổi và nguyên nhân của nó là điều hiển nhiên.

G. W. von Leibniz

G.F.B.Riemann

Song, khái niệm hàm số ngày nay khác xa với khái niệm hàm số của 3 thế kỷ. Năm 1692, khi Gottfried Wilhelm von Leibniz (1/7/1646 - 4/11/1716) người Đức sử dụng lần đầu tiên thuật ngữ "hàm số" (function) thì thuật ngữ này chỉ dùng để biểu thị những đại lượng hình học có quan hệ tới các giao điểm của "màn", "tọa độ", "cát tuyến" với đường cong. Đến thế kỷ XVIII khái niệm hàm số được mở rộng thành "biểu thức giải tích do đại lượng biến đổi và đại lượng không đổi tạo thành". Sang thế kỷ XIX, sự hạn chế của biểu thức giải tích được mở rộng bằng quan hệ tương ứng. Sự mở rộng khái niệm hàm số qua mấy lần đó đã phản ánh được tốc độ phát triển nhanh chóng của toán học cận đại.

Định nghĩa hàm số mà ta nói ở trên do nhà toán học Georg Friedrich Bernhard Riemann (17/9/1826 - 20/7/1866) người Đức đưa ra.

Ký hiệu f(x) là hàm số do nhà toán học Johann Bernoulli (27/7/1667 - 1/1/1748) người Thụy Sỹ đưa ra năm 1718 và viện sĩ Léonhard Euler (15/4/1707 - 18/9/1783) người Pháp gốc Thụy Sỹ (nhưng làm việc ở Nga 31 năm, ở Đức 25 năm) đưa ra năm 1734.

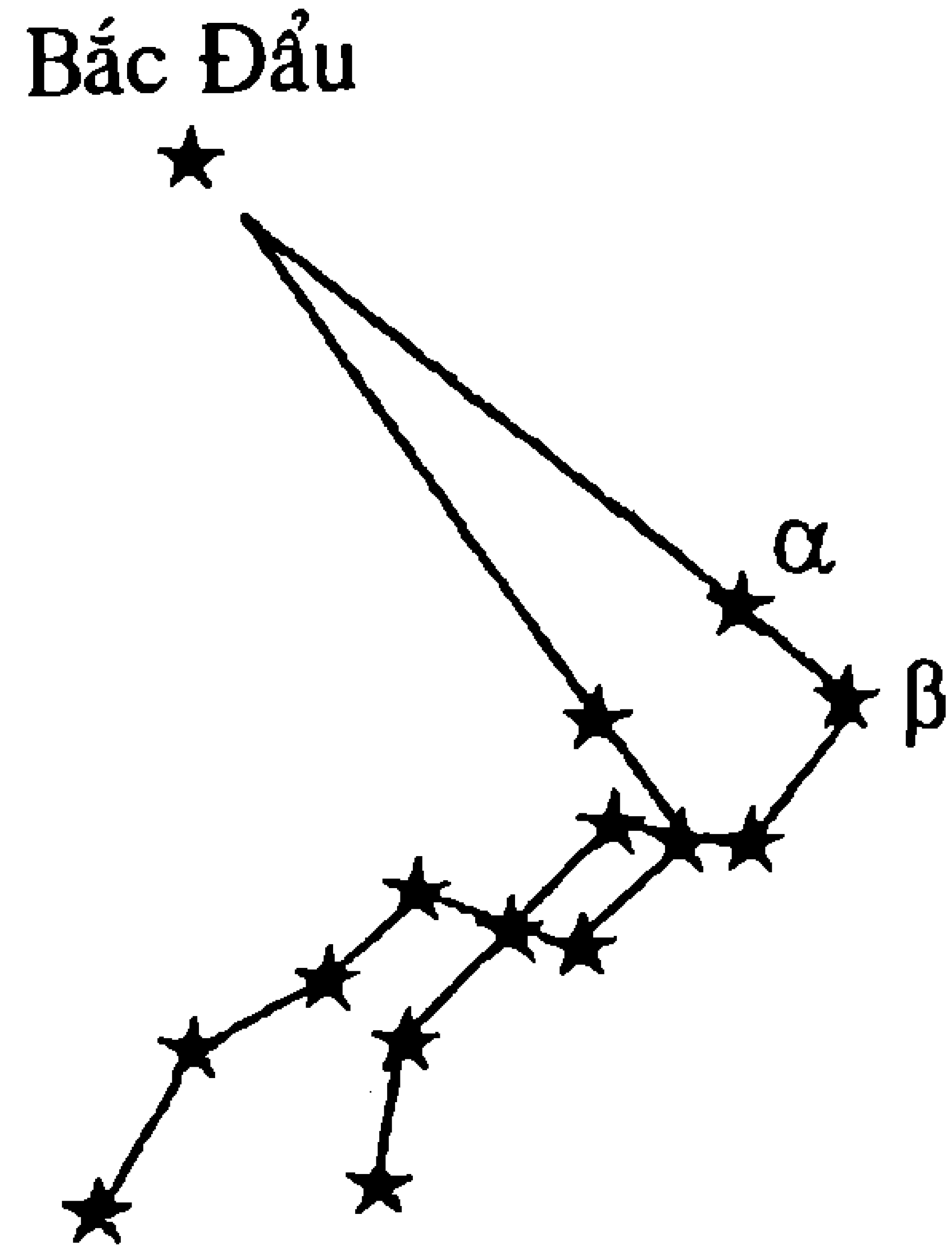
Một đại lượng giữ được cùng một trị số xác định trong vấn đề được nghiên cứu thì gọi là đại lượng không đổi. Một đại lượng biến đổi nào đó trong thời khắc cục bộ và sự biến đổi của nó là không đáng kể thì có thể xem như *đại lượng không đổi*. Ví dụ, định lý "Tổng ba góc trong của một hình tam giác là 180°, chỉ đúng khi nó ở trên mặt phẳng. Nhưng mặt tuyệt đối phẳng là không tồn tại, chẳng hạn mặt phẳng của nước, do quan hệ lực hấp dẫn của tâm Trái Đất, nên mặt nước có độ cong mặt cầu. Song điều đó không hề ảnh hưởng tới việc ứng dụng định lý này. Lại như chòm sao Đại Hùng, đúng như đã nói ở trên, vị trí của nó 10 vạn năm về trước và 10 vạn năm về sau này hoàn toàn không giống nhau, nhưng trong mấy thế kỷ gần đây, chúng ta hoàn toàn có thể coi nó là

L. Euler

Johann Bernoulli

không đổi, thậm chí có thể sử dụng nó để xác định chính xác vị trí của các sao khác.

Trong chòm sao Đại Hùng, α và β là hai sao sáng nhất (hình 1-3). Sao Bắc Đẩu không sáng bằng α và β nhưng nó rất quan trọng (sẽ nói ở mục 4: "Kim chỉ Bắc" kỳ dị), các sao khác đều quay quanh nó, cho dù vị trí tương đối của những sao này cũng đang thay đổi. Nhưng các quy tắc vị trí nói trên, ít nhất cũng còn có thể sử dụng được mấy trăm năm nữa.



Hình 1-3

2. CỔ KIM TRANH LUẬN VỀ "NGỒI GỐC CÂY ĐỢI THỎ"

Có câu chuyện ngụ ý sâu xa gọi là "Ngồi gốc cây đợi thỏ", như sau:

Có một chàng nông dân ở nước Tống. Một hôm anh ta đang làm ruộng ngoài đồng, thấy một chú thỏ phóng vụt qua vừa đúng đâm phải gốc cây bên ruộng, gãy cổ chết ngay. Anh ta đến gốc cây nhặt chú thỏ đưa về. Như vậy, anh ta không tốn sức mà được chú thỏ có sẵn.

Từ sau khi nhặt được chú thỏ, chàng nông dân này sinh ra nghĩ ngợi lung tung, bỏ cày cấy ruộng vườn, ngày ngày ngồi gần gốc cây đó đợi con thỏ nữa đâm vào gốc cây để nhặt. Kết quả là không nhặt được con thỏ nào nữa mà lại bỏ hoang ruộng vườn.

Câu chuyện ngụ ngôn này có trong tác phẩm "Hàn Phi Tử Tiên Tần" lưu truyền đã 22 thế kỷ. Từ đó, người ta cứ cho rằng, "đợi thỏ" không được thì tội là ở "ngồi gốc cây"! Kỳ thực, trách cứ "ngồi gốc cây" là không đúng lý. Mấu chốt của vấn đề là quy luật vận động của thỏ. Nếu con đường thẳng tới cây là con đường thỏ phải chạy qua thì việc "ngồi gốc cây" sẽ như thế nào?

Song, đúng như câu chuyện chúng ta đã nói ở mục 1, thế giới quanh ta là một thế giới chuyển động không ngừng. Chuyển động của thỏ có thể theo trăm nghìn con đường khác nhau, hy vọng một đường giao nhau lần nữa với gốc cây là rất mong manh. Đây chính là bi kịch của chàng nông dân này!

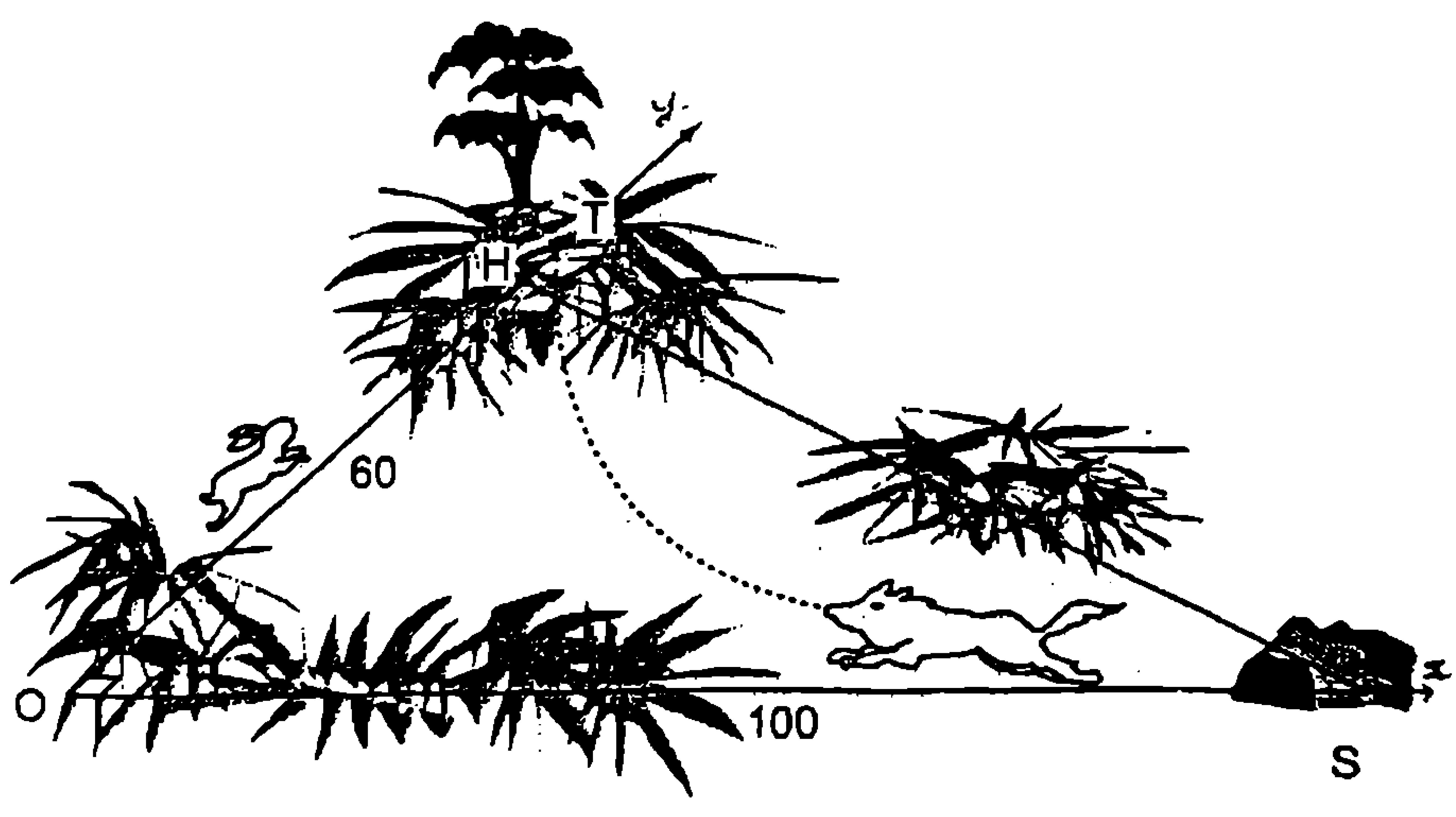
Sau đây là câu chuyện tuyệt diệu hơn, có thể khiến người ta nhìn thấy một cách sinh động sự ách tắc của vấn đề. Trong câu chuyện người ta nêu rõ rằng, nếu có thể làm rõ được quy luật chuyển động của thỏ thì có thể "ngồi gốc cây" lại là sáng suốt!

Leonardo de Vinci (15/4/1452 - 2/5/1519) là bậc thầy nghệ thuật hội họa của thời kỳ văn hoá Phục Hưng Italia. Câu chuyện "vẽ trứng" của ông được lưu truyền rộng rãi.

L. de Vinci

Leonardo de Vinci chẳng những có trình độ rất sâu về nghệ thuật hội họa mà còn có nhiều nghiên cứu về toán học. Ông đã từng nêu ra vấn đề thú vị "Sói đói vồ thỏ".

Một con thỏ đang kiếm ăn ở O cách hang H của nó 60 mã (1 mã là 1yd = 0,9144m) về phía Nam. Cũng lúc đó một con sói đang đói dạo ở S cách thỏ 100 mã về phía Đông (hình 2-1).



Hình 2-1

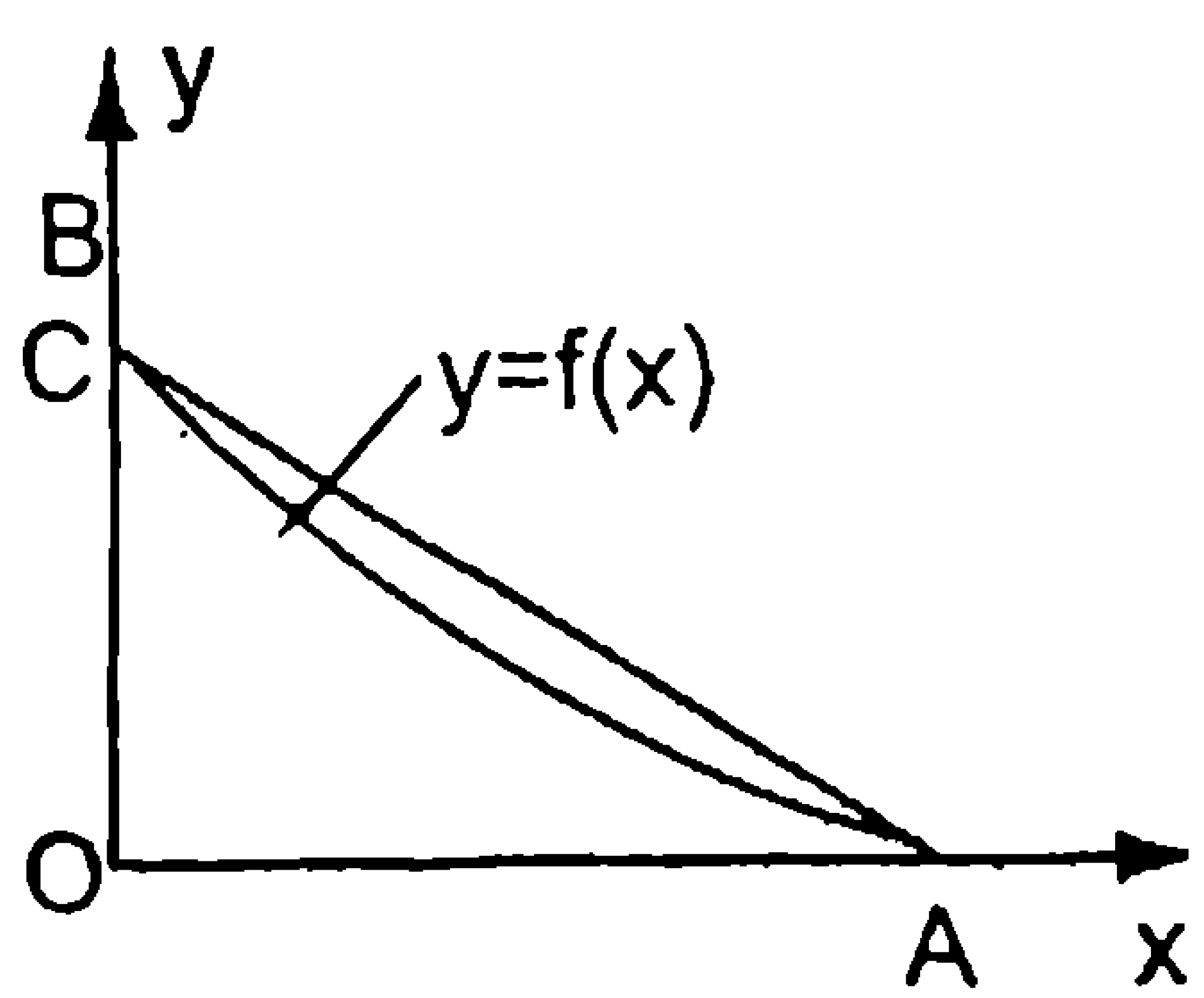
Trong khoảnh khắc quay đầu, thỏ bỗng bắt gặp ánh mắt thèm khát của sói đói, linh cảm thấy đại nạn, vội phóng về hang. Sói thấy miếng mồi ngon sắp bị mất, dán mắt đuổi theo thỏ với tốc độ gấp đôi thỏ. Cuộc rượt đuổi sinh tử giữa sói và thỏ đã xảy ra. Hỏi thỏ có thoát khỏi đại nạn không?

Với nội dung của câu chuyện này, người ta đã chuyển thành bài toán như sau:

Lấy O làm gốc, OS và OH nằm trên hai trục Ox và Oy. Lấy 1 mã làm đơn vị chiều dài thì OS = 100, OH = 60. Từ định lý Pythagore trong tam giác vuông, ta có:

$$SH = \sqrt{OS^2 + OH^2} = \sqrt{100^2 + 60^2} = 116{,}6 \text{ (mã)}$$

Như vậy, nếu sói chạy thẳng tới hang thỏ theo hướng SH, do tốc độ của thỏ chỉ bằng một nửa của sói nên khi sói chạy tới cửa hang thỏ thì thỏ mới chỉ chạy được quãng đường $\frac{116{,}6}{2} = 58{,}3$ (mã), tức là thỏ còn cách cửa hang 60,0 – 58,3 = 1,7 (mã). Lúc này sói đã đến cửa hang trước, hoàn toàn "án ngữ" cửa hang, "ngồi đợi" thỏ đến.



Hình 2-2

Tính toán ở trên hầu như không chê vào đâu được. Kết luận chỉ là đại nạn của thỏ đã đến. Nhưng trên thực tế tính toán như vậy là sai lầm! Sói không thể biết trước mà chạy thẳng tới cửa hang thỏ để "ngồi đợi". Sách lược của sói chỉ có thể là chăm chăm vào thỏ đang chạy. Do vậy, bản thân sói cũng chạy theo một đường cong. Đường cong này có thể dùng phương pháp giải tích mà suy dẫn ra (hình 2-2):

$$y = \frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + \frac{200}{3} \qquad (2\text{-}1)$$

Khi x = 0, từ (2-1) ta được $y = 66\frac{2}{3}$ (mã). Như vậy, nếu phía Bắc không có hang thỏ thì khi thỏ chạy đến điểm T cách điểm gốc O một đoạn $66\frac{2}{3}$ (mã), vừa vặn sói bắt được thỏ. Nhưng may thay, hang thỏ chỉ cách gốc O có 60 mã, nên vào thời điểm ấy thỏ đã yên tâm chui vào hang rồi.

Cùng với sự hiểu rõ đáp án "Sói đói vồ thỏ", sự phân tích rõ về "Ngồi gốc cây đợi thỏ" tựa hồ đã gần đến hồi kết thúc. Nào ngờ, sau này lại có người nêu ra lời bàn khác, hoài nghi về tính chân thực của câu chuyện "Ngồi gốc cây đợi thỏ". Lý do là: Con thỏ thông minh, nhanh nhẹn như vậy làm sao có thể tự đâm vào gốc cây như thế được? Đôi mắt tinh anh của nó nhìn đi đâu?

Nói như thế không phải không có lý! Song, đáp án là khẳng định. Muốn hiểu rõ điều này, còn phải xem xét từ cộng năng của mắt.

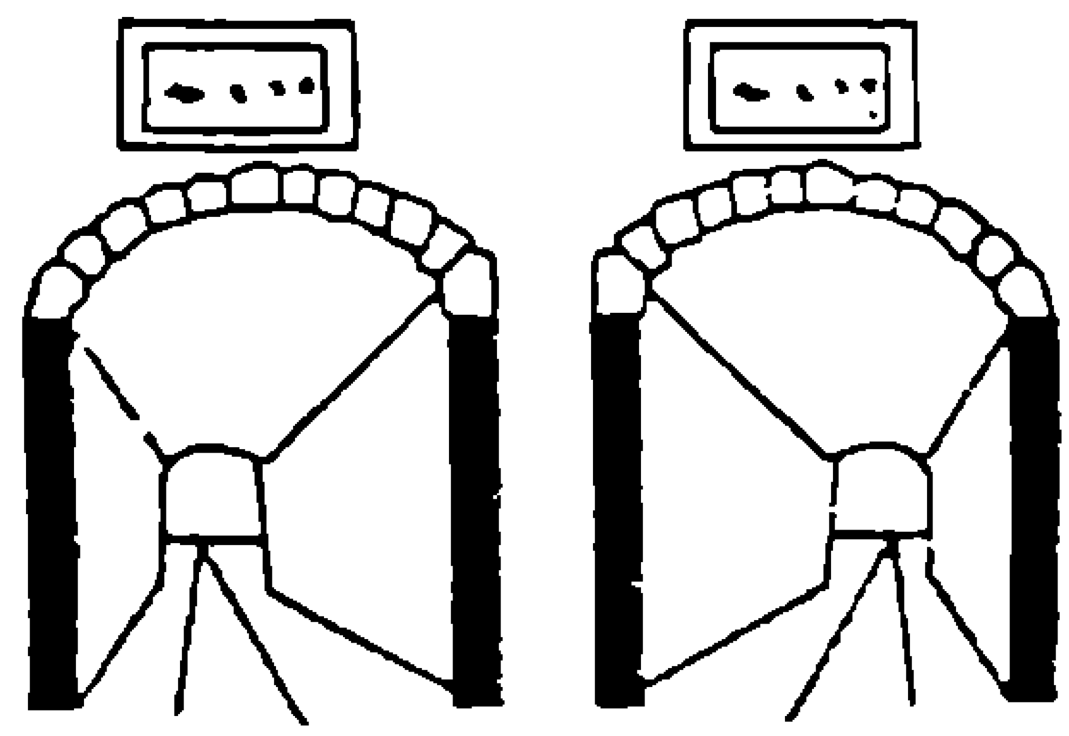
Công năng của mắt rất lý thú. Một mắt có thể nhìn rõ vật thể xung quanh, nhưng trái lại không có cách gì phán đoán chính xác khoảng cách giữa mắt và vật thể đó. Thực nghiệm sau đây có thể chứng thực điều này một cách sinh động:

Lấy hai chiếc bút chì vót nhọn, cầm trên hai tay. Nhắm một mắt và đưa hai đầu nhọn của hai bút chì đến gần nhau. Lúc này bạn sẽ phát hiện một hiện tượng kỳ lạ: Cho dù bạn tập trung chú ý như thế nào thì hai đầu nhọn của hai bút chì luôn đan xen mà qua, không đưa sát mũi nhọn vào nhau được. Song, nếu bạn mở hai mắt ra, muốn ngắm đúng mũi nhọn bút chì thì dễ dàng làm được.

Thực nghiệm chứng tỏ: Dùng hai mắt, có thể đoán được chính xác vị trí của vật thể, còn dùng một mắt nhìn thì không thể! Vậy tại sao dùng hai mắt có thể xác định được vị trí chính xác của vật thể?

Thì ra hình của cùng một vật thể trong hai mắt nhìn không giống nhau.

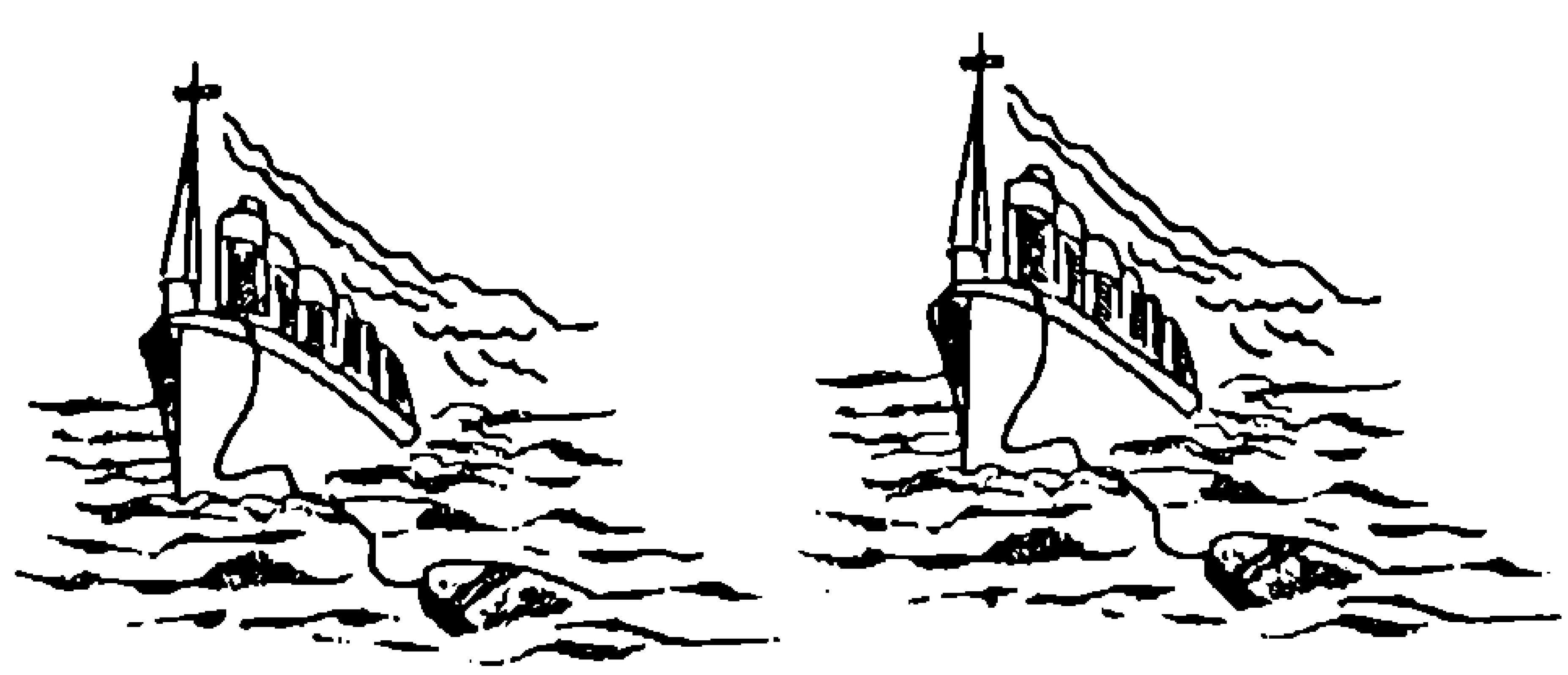
Hình 2-3 là hình của một đường hầm trong hai mắt, sự khác nhau giữa chúng rất rõ. Để chứng minh hai hình 2-3a và 2-3b là do hai mắt phải - trái của bạn nhìn riêng từng cái một, bạn có thể đặt hình vẽ này ở trước mắt, sau đó hai mắt nhìn chăm chú vào chỗ khe giữa hai hình, cứ như vậy tập trung tinh lực vài giây và tập trung chú ý vào chỗ muốn nhìn rõ phía xa hơn sau hình vẽ. Như vậy, không cần lâu, trước mặt bạn sẽ xuất hiện một cảnh tượng thần kỳ: Hình tượng hai bên phải - trái của hình vẽ dần sát gần vào nhau và cuối cùng hoà quyện làm một, biến thành một bức tranh đường hầm lập thể.



a) b)

Hình 2-3

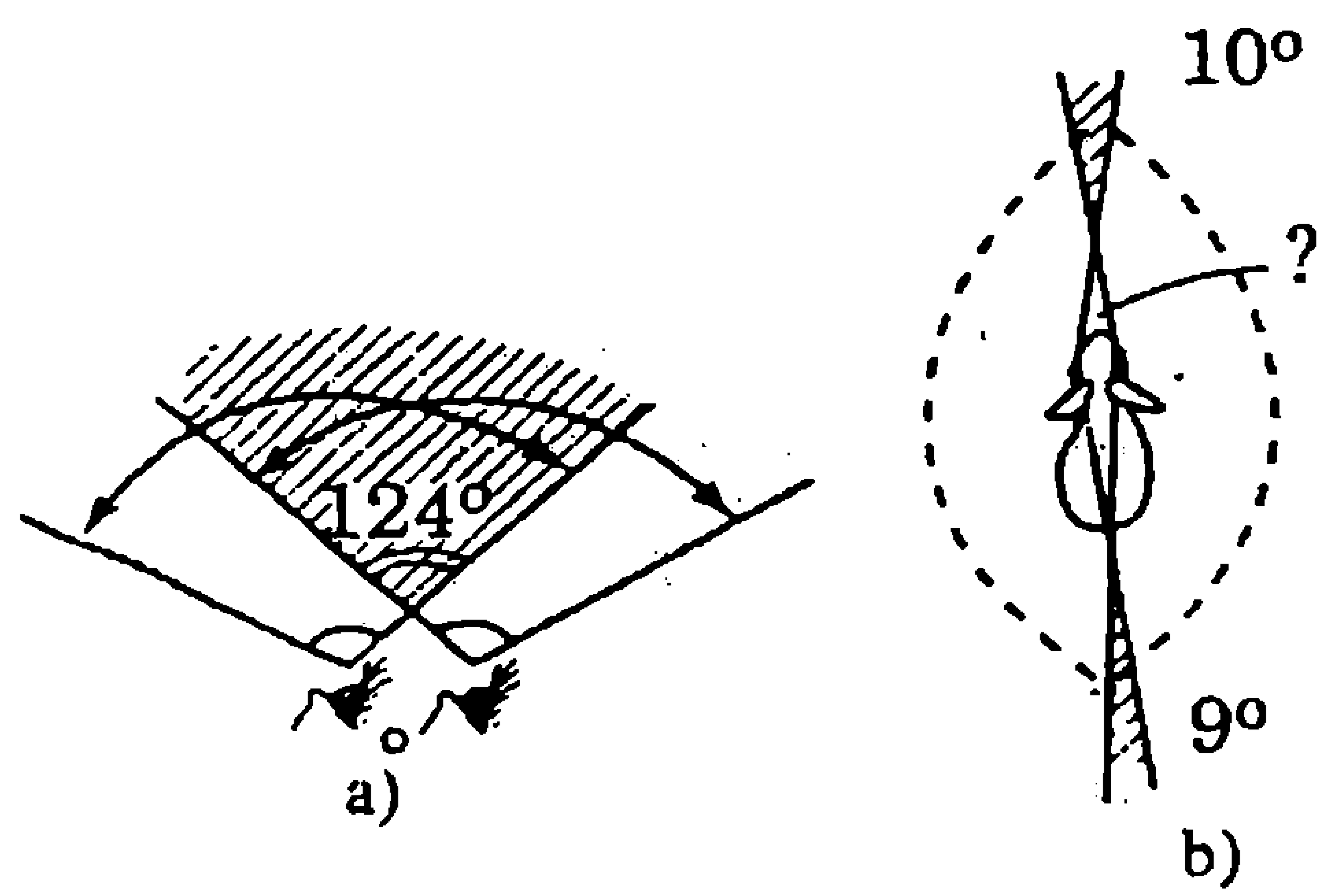
Hình 2-4 là một ví dụ để luyện tập rất tốt. Nó được chọn từ chương 9 của cuốn "Vật lý vui" của Besailiman. Khi bạn cảm thấy hai hình sát vào nhau và hoà vào nhau, bạn sẽ hiểu ý được một bức tranh tráng lệ trên biển: Một con tàu trên mặt biển bao la, đang đón gió rẽ sóng.



Hình 2-4

Bây giờ chúng ta quay trở lại bàn luận về thỏ và cây.

Quan sát kỹ một chút sẽ phát hiện ra rằng, vị trí mắt người và mắt thỏ không giống nhau: Hai mắt người ở phía trước, cách nhau rất gần, còn hai mắt thỏ lại ở hai bên đầu. Theo đo đạc, tầm nhìn của mỗi mắt thỏ là 189°30', còn tầm nhìn của mỗi mắt người là 166°. Song do mắt người ở phía trước nên tầm nhìn của hai mắt đồng thời nhìn thấy là 124°. Vật thể trong vùng này, mắt người có thể đoán định chính xác vị trí của nó, còn mắt thỏ tuy nói có thể nhìn thấy bất cứ vật gì xung quanh nhưng tầm nhìn trùng lên nhau chỉ có 19°, trong đó phía trước 10° và phía sau 9°. Vì vậy, thỏ chỉ có trong một vùng nhìn rất nhỏ mới có thể xác định được vị trí của vật thể. Từ hình 2-5 còn có thể thấy rằng, dù cho thỏ có thể cảm giác một cách nhanh nhạy các uy hiếp đến từ tứ phía, nhưng các vật dưới mũi (vùng có dấu hỏi ở hình 2-5b) lại hoàn toàn không nhìn thấy, huống hồ trong khi chạy thục mạng, nên việc đâm vào gốc cây là có thể xảy ra.



Hình 2-5

Người ta nói rằng, chỉ có hai con vật nhìn thấy sau lưng mà không cần quay đầu lại là thỏ và vẹt.

Câu chuyện "Ngồi gốc cây đợi thỏ" là chính Hàn Phi Tử nhìn thấy tận mắt hay là ông hư cấu? Hiện nay không có cách gì xác định được. Song, dựa vào sự phân tích ở trên, câu chuyện này vẫn đáng tin.

3. TRÒ CHƠI TRÊN QUẢNG TRƯỜNG MANKE

Quảng trường Manke nổi tiếng của Venice. Một phía của quảng trường có một nhà thờ hùng vĩ mà mặt tiền hướng về phía quảng trường rộng 82m. Quảng trường này thường thu hút khách bốn phương về đây chơi một trò chơi kỳ lạ: Bịt mắt rồi đi từ một đầu quảng trường đến đầu có nhà thờ, xem ai có thể đến được trước cửa nhà thờ.

Điều kỳ lạ là: Mặc dù đoạn đường chỉ dài 175m nhưng lại không có ai may mắn làm được như yêu cầu của trò chơi! Tất cả đều đi thành hình vòng cung, lệch sang một bên (hoặc trái hoặc phải).

Những hiện tượng tương tự đã xuất hiện thần kỳ hơn dưới ngòi bút của nhà văn nổi tiếng Mark Twain (1835 - 1910) người Mỹ. Trong cuốn *Ghi chép chuyến du lịch nước ngoài* ông đã miêu tả một lần du lịch đêm xảy ra trên 4,7 dặm Anh của mình, song tất cả đều diễn biến trong một căn phòng tối om! Sau đây là một đoạn trong câu chuyện đó:

"... Tôi tỉnh dậy, cảm thấy khát trong miệng. Trong đầu tôi nảy ra một ý nghĩ: Mặc quần áo vào, ra vườn hoa để thay đổi không khí, đồng thời rửa mặt bên vòi phun nước.

Tôi nhẹ nhàng bò dậy, bắt đầu tìm quần áo. Tôi tìm được một chiếc tất, còn chiếc tất nữa ở đâu lại không có cách gì biết được. Tôi mò mẫm ra chỗ xa hơn, càng đi càng xa, tất chưa tìm được, lại vấp phải đồ dùng trong nhà. Khi tôi đi ngủ, đồ dùng trong nhà không nhiều như thế này, còn bây giờ? Cả căn phòng đầy đồ dùng, đặc biệt là ghế tựa, dường như khắp nơi đều là ghế! Không thể có ai đó dọn các thứ này đến trong lúc tôi đang ngủ. Những ghế này tôi không nhìn thấy vì phòng tối, nhưng đầu tôi lại luôn đụng phải chúng. Cuối cùng tôi nghĩ: Thiếu một chiếc tất cũng được. Tôi đứng dậy và đi về phía cửa. Tôi bất ngờ nhìn thấy tôi lờ mờ trong gương.

Tôi mất phương hướng và không nhớ ra là mình đang ở đâu. Nếu trong phòng có một chiếc gương thì tôi đã nhận ra phương hướng. Nhưng phòng lại có hai chiếc gương, nhưng như có cả nghìn chiếc!

Tôi muốn men theo tường ra cửa, bắt đầu cuộc thử nghiệm mới. Nào ngờ lại làm rơi một bức tranh. Bức tranh này không lớn nhưng khi rơi lại phát ra âm thanh như bức tranh lớn. Coliso (người nằm trên giường bên cạnh, cùng phòng với tôi) vẫn ngủ yên. Nhưng tôi cảm thấy, nếu tôi làm phát sinh tiếng động sẽ đánh thức anh ta dậy. Tôi bắt đầu thử nghiệm một con đường khác. Tôi tìm chiếc bàn tròn mà lúc nãy đã mấy lần tôi đi đến bên cạnh nó, định từ đó mò đến giường của tôi. Nếu tìm thấy giường thì tôi tìm được bình thuỷ tinh đựng nước và như vậy có thể thoả mãn cơn khát đang hành hạ tôi. Phương pháp tốt nhất là bò bằng hai cánh tay và hai đầu gối. Phương pháp này tôi đã từng áp dụng nên tôi tín nhiệm nó.

Cuối cùng tôi cũng đã tìm thấy cái bàn tròn, vì đầu tôi đã đụng nhẹ vào nó. Thế là tôi lại đứng lên, đưa hai tay xoè năm ngón ra trước, để cân bằng với cơ thể, cứ như vậy đi quanh quẩn về phía trước. Tôi sờ được một chiếc ghế, sau đó là tường, lại một chiếc ghế, rồi sopha, batoong, lại một chiếc sopha nữa. Điều này làm tôi khó hiểu, vì tôi nhớ rất rõ là trọng phòng này chỉ có một chiếc sopha. Tôi lại đụng phải bàn và sau đó đụng phải một số ghế.

Chỉ đến lúc đó tôi mới nhớ ra, vì bàn hình tròn trên không thể lấy làm điểm xuất phát cuộc "du lịch". Tôi vui mừng khi nhận ra điều đó và đi vào khoảng trống giữa ghế và sopha. Nhưng giữa đường tôi đụng phải đài nến trên lò sưởi gắn ở tường, làm nó rơi xuống. Tiếp đó tôi lại đụng đèn bàn, cuối cùng là làm bình thuỷ tinh đựng nước rơi vỡ tan. Tiếng động làm Coliso hét ầm lên: "Có trộm!", "Bắt trộm!".

Cả khách sạn thức dậy: Ông chủ, du khách, người phục vụ... cầm nến và đèn lồng chạy vào phòng tôi.

Tôi nhìn bốn phía. Tôi đứng cạnh giường Coliso. Trong phòng chỉ thấy 1 chiếc sopha, 1 chiếc ghế tựa...

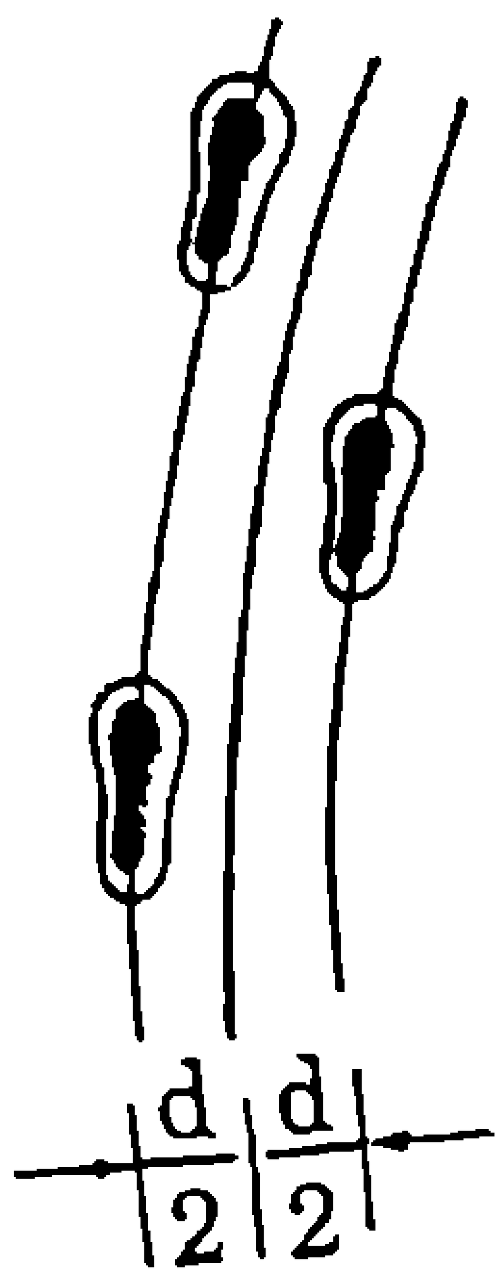
Theo tính toán bằng đo bước chân, tôi biết rằng đêm nay tôi đã đi được tổng cộng 4,7 dặm Anh".

Đoạn truyện được M.Twain miêu tả ở trên chắc chắn là đã được thổi phồng lên nhưng cảnh ngộ về một người sau khi mất phương hướng mà ông đã kể thì đều có khả năng xảy ra.

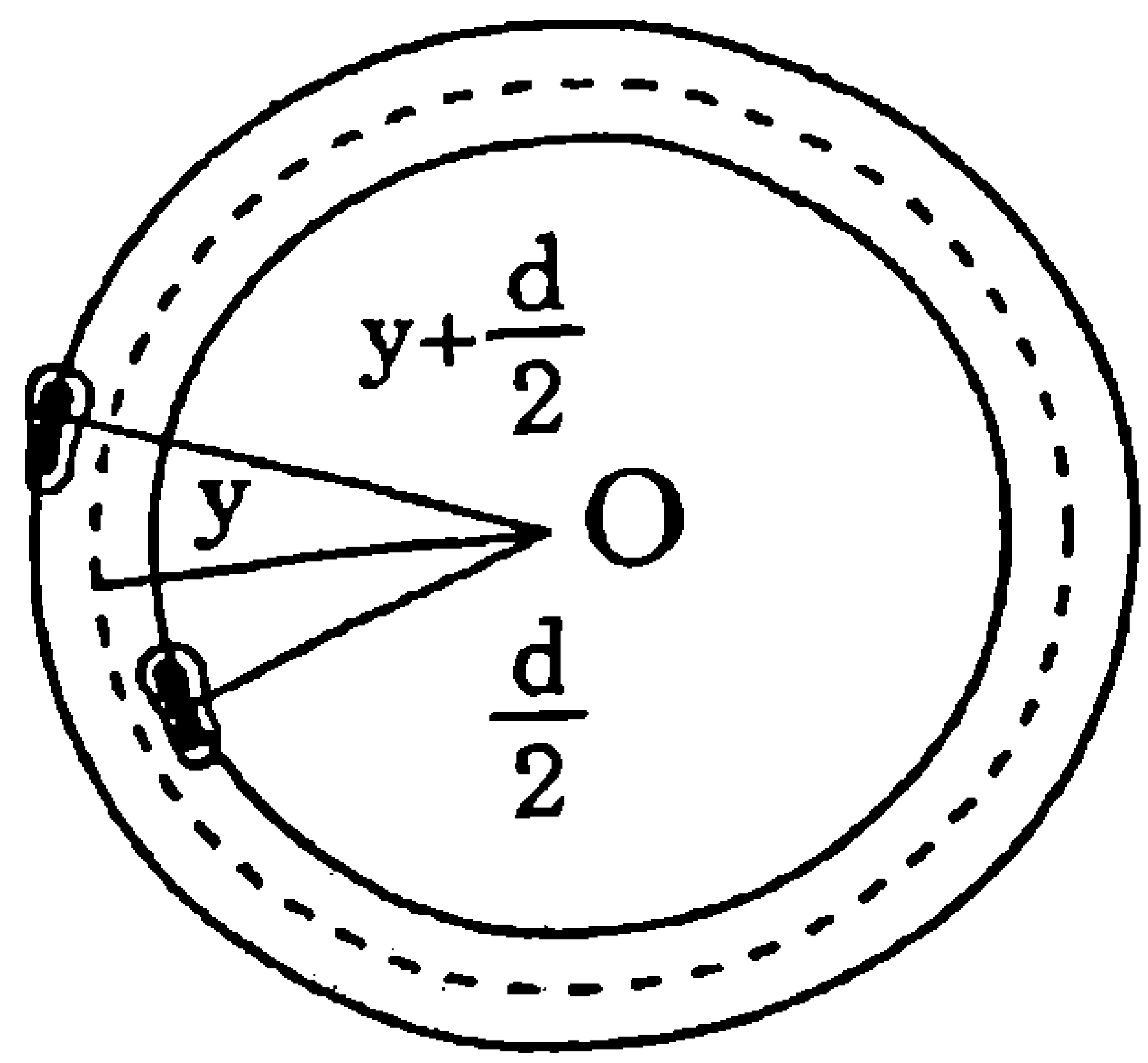
Bạn đọc còn có thể thấy được những miêu tả người đi trên sa mạc hoặc vùng tuyết phủ do mất phương hướng mà loanh quanh tại chỗ. Tất cả cảnh ngộ này gần như trò đùa, cuối cùng những hiện tượng trên đã làm các nhà khoa học chú ý.

Năm 1896, nhà sinh lý học Cothpen người Na Uy đã tiến hành tìm tòi sâu về vấn đề nhắm mắt quay tròn. Sau khi đã thu thập được hàng loạt ví dụ tiêu biểu, ông phân tích và nhận xét là tất cả các hiện tượng này đều do hai chân con người gây ra. Do thói quen lâu ngày tạo nên, khiến cho bước của chân này dài hơn chân kia một khoảng cách nhỏ. Khoảng cách này tuy không đáng kể nhưng chính đoạn chênh lệch x này đã làm cho người ta không đi được thành đường thẳng mà sẽ đi thành đường vòng tròn có bán kính y.

Bây giờ chúng ta hãy nghiên cứu một chút về quan hệ hàm số giữa x và y.



Hình 3-1



Hình 3-2

Giả sử hai chân của một người nào đó đi thành hai đường tròn cách nhau d (hình 3-1). Rõ ràng là khi người đó đi vòng tròn thì thực tế hai chân đã đi trên hai đường tròn đồng tâm bán kính chênh nhau một khoảng d. Đặt chiều dài trung bình bước đi của người đó là *l*. Vậy quãng đường đi của chân ngoài so với chân trong nhiều hơn là (hình 3-2):

$$2\pi\left(y+\frac{d}{2}\right)-2\pi\left(y-\frac{d}{2}\right)=2\pi d \qquad (3\text{-}1)$$

Mặt khác, quãng đường này lại bằng tích của số bước chân của người đó đi hết một vòng với sự chênh lệch bước chân ký hiệu là x, tức là:

$$2\pi d=\left(\frac{2\pi y}{2l}\right).x \qquad (3\text{-}2)$$

Đơn giản (3-2), ta được:

$$y = \frac{2dl}{x} \tag{3-3}$$

Với một người bình thường thì d = 0,1m; l = 0,7m. Thay vào (3-3), ta được (đơn vị là m):

$$y = \frac{2 \times 0,1 \times 0,7}{x} = \frac{0,14}{x} \tag{3-4}$$

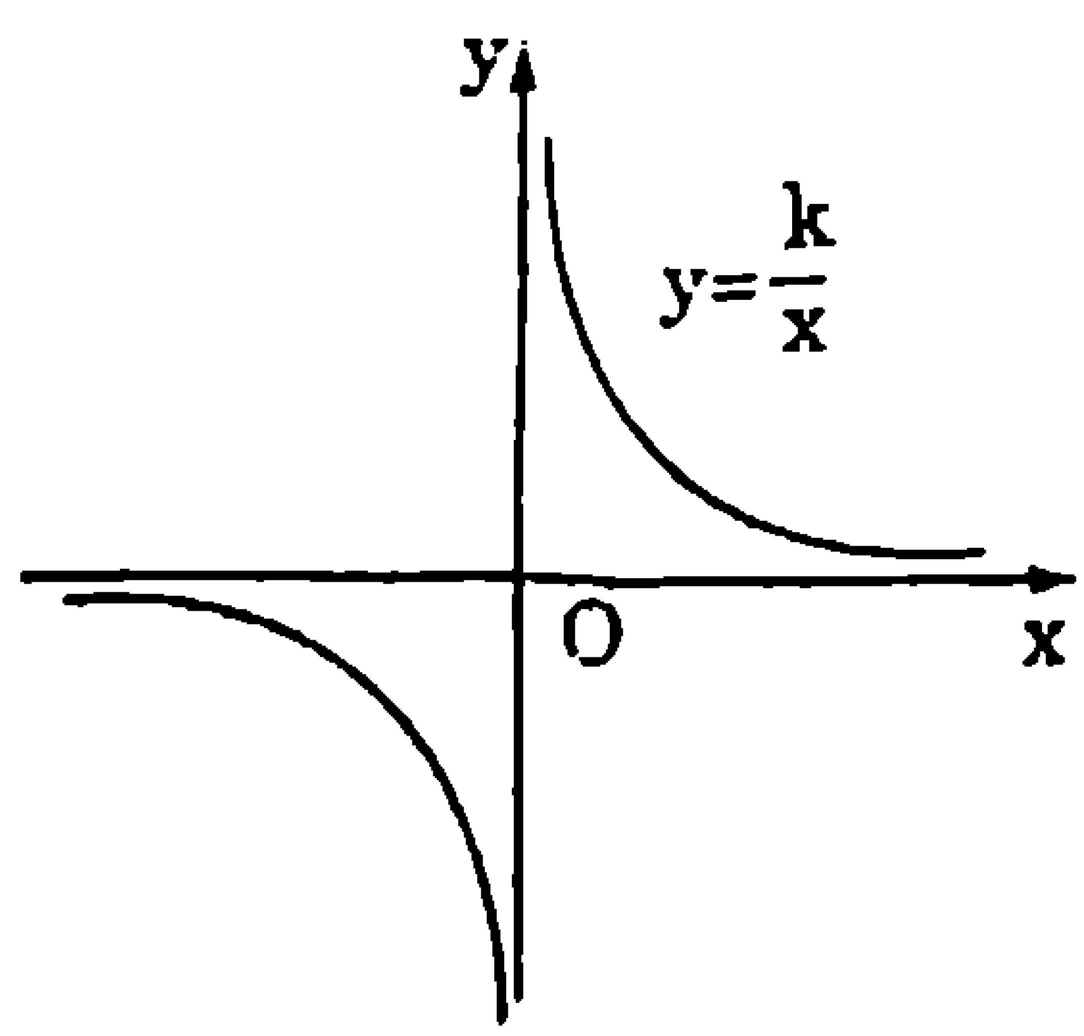
Công thức (3-4) để tính bán kính đường đi vòng tròn của người lạc đường. Nếu đặt chênh lệch hai bước chân của người lạc đường là 0,1mm thì sự sai lệch nhỏ nhoi ấy cũng đủ để làm cho người đó đi vòng tròn trong phạm vi bán kính 3km!

Quan hệ giữa các đại lượng biến đổi x và y trong (3-4) trong toán học gọi là *quan hệ hàm số tỷ lệ nghịch*. Hàm số tỷ lệ nghịch có dạng tổng quát là:

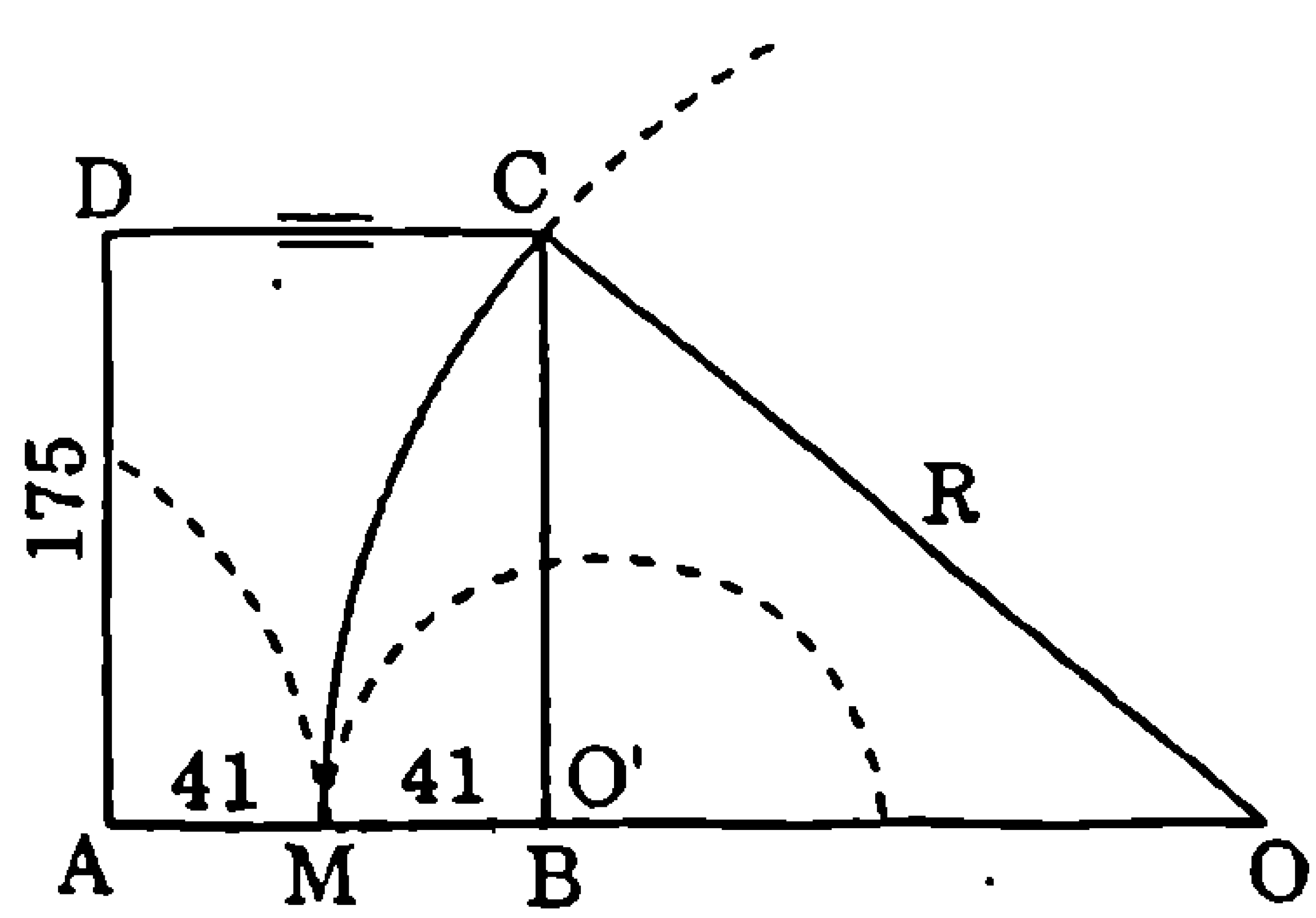
$$y = \frac{k}{x} \tag{3-5}$$

trong đó k - đại lượng không đổi.

Đồ thị của hàm số tỷ lệ nghịch là hai đường cong (hình 3-3). Về mặt toán học, hàm số tỷ lệ nghịch gọi là *hyperbol đẳng biên*. Trong các lĩnh vực như công nghiệp, quốc phòng... hàm số tỷ lệ nghịch được sử dụng nhiều.



Hình 3-3



Hình 3-4

Sau đây chúng ta trở lại trò chơi trên quảng trường Manke nói ở trên. Trước hết ta hãy tính toán một chút. Khi bịt mắt đi từ điểm M bên kia quảng trường, muốn đến trước cửa nhà thờ CD (hình 3-4) thì bán kính cung nhỏ nhỏ nhất nên là bao nhiêu? Chú ý tới hình chữ nhật ABCD, cạnh $BC = 175m, AM = MB = \frac{82}{2} = 41m$.

Vậy vấn đề nói trên chắc chắn tương đương với mệnh đề sau đây trong hình học:

Biết BC và MB, hãy tìm độ lớn của bán kính R của cung MC.

Ta có:

$$BC^2 = R^2 - (R - MB)^2 = MB(2R - MB)$$

Thay số vào, ta được:

$$175^2 = 41(2R - 41)$$

Từ đó R = 394(m)

Điều này nói lên rằng, du khách muốn hy vọng thành công thì bán kính cung đường đi phải không nhỏ hơn 394m.

Bây giờ chúng ta lại tính toán thêm chút nữa. Muốn đạt được yêu cầu nêu trên thì chênh lệch giữa hai bước chân của du khách cần những hạn chế gì?

Theo (3-4) và điều kiện:

$$y = R \geq 394 \text{ (m)}$$

thì: $$x \leq \frac{0,14}{394} = 0,00035(m)$$

Điều này chứng tỏ rằng, chênh lệch giữa hai bước chân của du khách phải nhỏ hơn 0,35mm, nếu không thì việc thành công sẽ là vô vọng! Song, khi bịt mắt và chênh lệch giữa hai bước chân của du khách yêu cầu phải nhỏ hơn 0,35mm thì khó mà đạt được. Đó chính là lý lẽ trong trò chơi này: Không một ai bịt mắt mà có thể đi đến trước cửa nhà thờ được!

4. "KIM CHỈ BẮC" KỲ DỊ

Nhận biết được phương Bắc chắc chắn là rất quan trọng đối với người đi trên sa mạc, trên thảo nguyên, trên biển cả bao la,... Nếu không, cho dù người đó nghĩ rằng mình luôn đi về phương Bắc, nhưng do sự chênh lệch giữa hai bước chân nên kết quả chỉ có thể đi vòng tròn quanh chỗ cũ mà thôi. Tư liệu thí nghiệm chứng tỏ rằng, đường kính của vòng tròn không thể nhỏ hơn 4km.

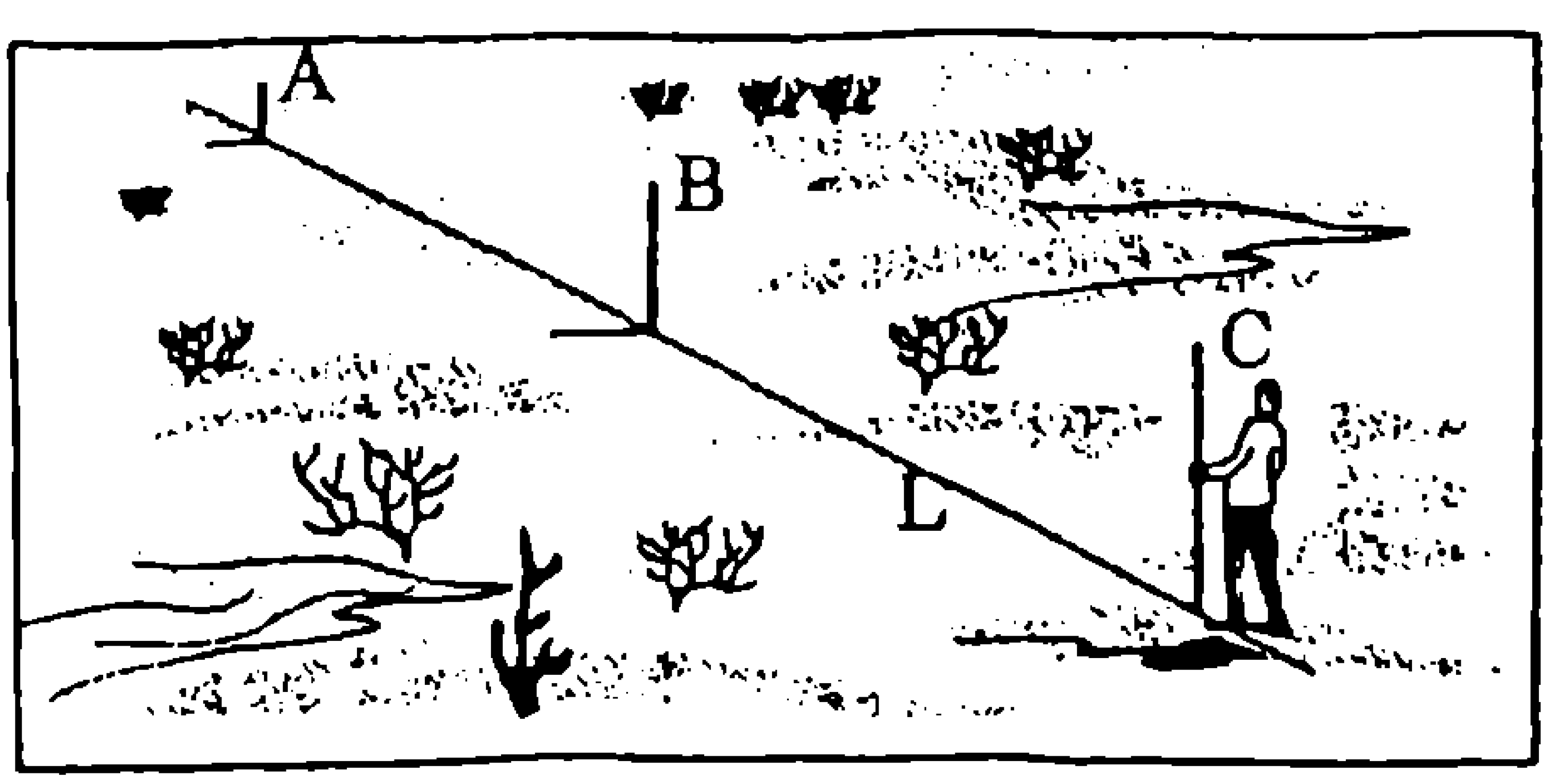
Trong câu chuyện ở mục 3, chúng ta đã giới thiệu bán kính mà người lạc đường đi vòng tròn tính theo (3-3):

$$R = \frac{2dl}{x} \tag{4-1}$$

Rõ ràng là muốn tăng trị số R thì chỉ có hai cách: tăng tử số hoặc giảm mẫu số của (4-1). Đối với con người, tăng độ dài bước chân l và khoảng cách d giữa hai chân để tăng tử số là rất có hạn, còn thu nhỏ chênh lệch bước đi x để giảm mẫu số thì càng khó hơn.

Thu nhỏ chênh lệch bước đi x càng khó hơn vì giả sử đường kính của vòng tròn là 4km thì thay vào (4-1) ta tính ra được x = 0,00007 (m), tức là chưa được 0,1mm.

Muốn giảm x tiếp tục thì e rằng "lực bất tòng tâm"!



Hình 4-1

Có một biện pháp thường dùng trong toán học và trong trắc địa để nâng cao trị số R như sau: Lấy 3 cọc tiêu, sau đó dùng phương pháp 3 cọc thẳng hàng như hình 4-1 để từ cọc A và cọc B mà xác định cọc C trên đường kéo dài AB. Sau đó nhổ cọc A, lại căn cứ vào cọc B và cọc C mà xác định cọc D. Cứ lặp đi lặp lại như vậy để xác định các cọc tiếp theo và mỗi lần đều có 3 cọc thẳng hàng. Quá trình này tựa như đi trên đường thẳng. Mỗi cọc tiêu tương ứng với một chân, khoảng cách trung bình L giữa hai cọc tiêu tương ứng với chiều dài l của hai bước chân, còn chiều rộng D của cọc tiêu tương ứng với khoảng cách ngang d giữa hai chân. Chênh lệch bước X có thể coi như chênh lệch hai bên giữa cọc với cọc. Về lý thuyết, chênh lệch này bằng không, nhưng thực tế không thể thu được nhỏ hơn chênh lệch giữa hai bước chân thông thường.

Như vậy, ta có:

$$L = 60l;\ D = \frac{1}{2}d \text{ và } X = x$$

Thay các giá trị này vào (4-1) ta tính được bán kính mới R':

$$R' = \frac{2 \times \frac{1}{2} d \times 60l}{x} = \frac{60dl}{x} = 30R$$

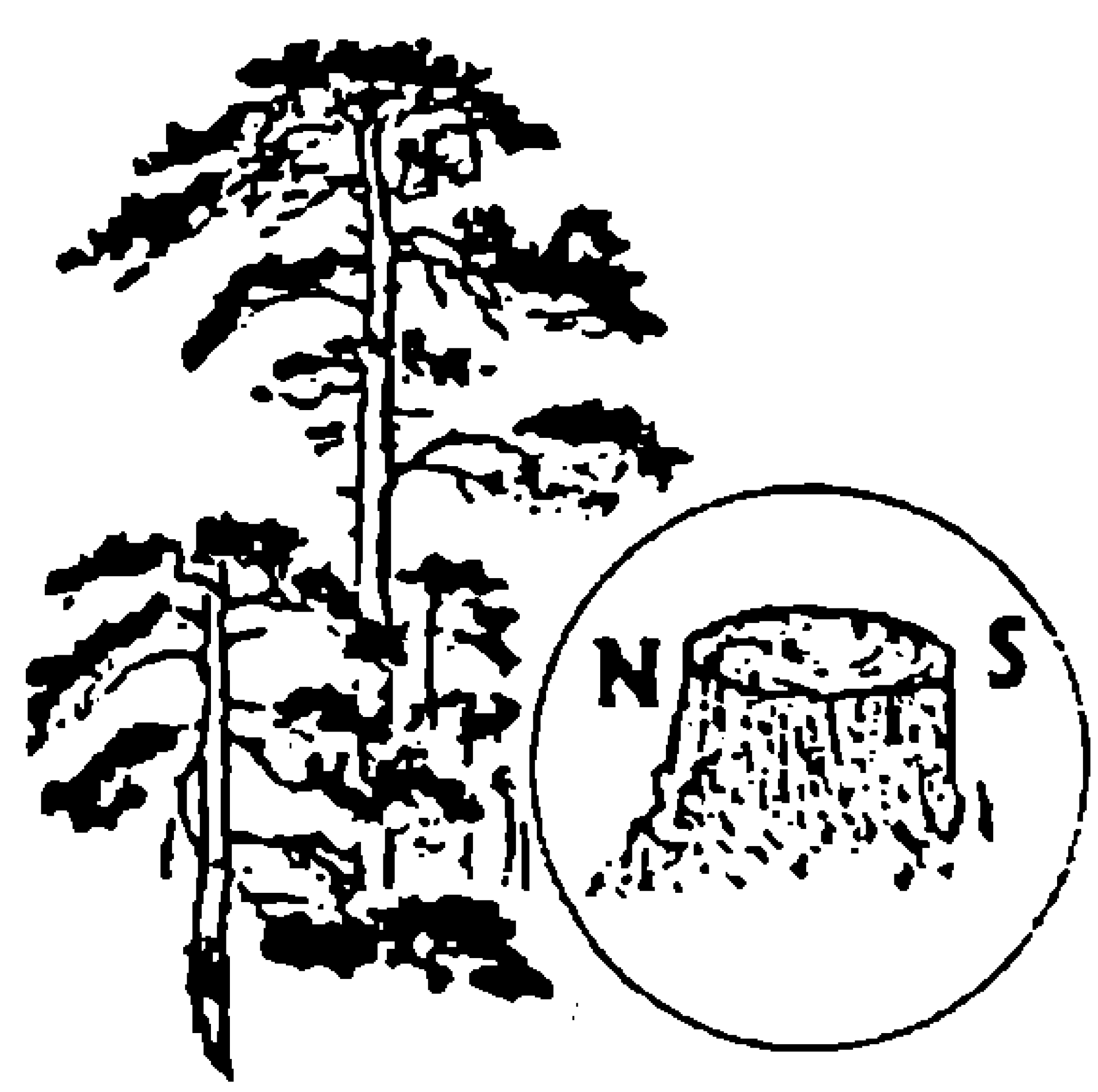
tức là đường kính của vòng tròn khoảng 120km. Đi quanh một cung của vòng tròn rộng như vậy, nói chung có thể coi như theo đường thẳng.

Song, đi theo đường thẳng và định hướng hành tiến là hai sự việc hoàn toàn khác nhau, cái sau là chủ yếu. Bởi vì, bạn luôn đi thẳng nhưng đáng lẽ đi về phương Bắc, bạn đã định hướng ngược lại nên chỉ có thể càng xa mục tiêu hơn mà thôi.

Bây giờ chúng ta hãy bắt chước sáng tạo ra một câu chuyện tương tự như Robinxon dưới ngòi bút của nhà văn Daniel Defoe (1660 - 1731) người Anh. Tưởng tượng nhân vật chính của chúng ta là một người mất phương hướng vì bị mất la bàn. Chúng ta hãy giúp ông ta thoát khỏi hoàn cảnh khó khăn này.

Nếu như khách du lịch này đi trong đêm "trời quang mây tạnh" thì không đáng lo, vì như ở mục 1 ta đã biết, sao Bắc Đẩu sẽ chỉ phương Bắc.

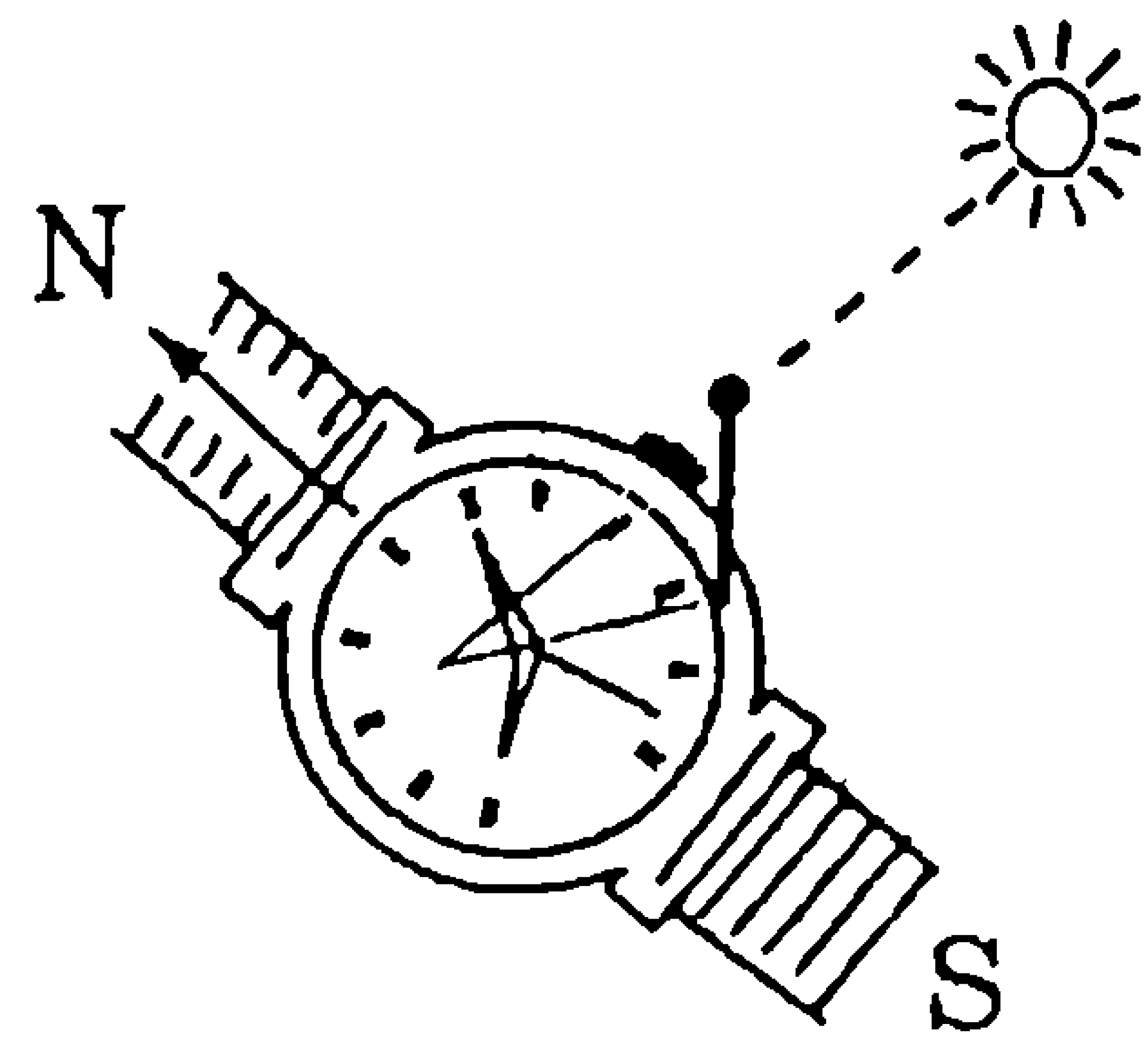
Nếu câu chuyện xảy ra trong đêm không có sao hoặc ban ngày thì tình hình trở nên khá nan giải. Song, chỉ cần tỉ mỉ quan sát xung quanh, chúng ta vẫn có hy vọng tìm được các mối xác định phương hướng, chẳng hạn vòng tuổi của cây ở Bắc Bán Cầu nói chung là lệch tâm như hình 4-2: vòng tuổi về phương Bắc (N) thì mau, còn vòng tuổi về phương Nam (S) thì thưa, vì cây có đặc tính là hướng quay về phía Mặt Trời mọc nhanh hơn. Nếu chúng ta đi vào chỗ hoang vu nhưng gặp được các thành quách đổ nát, các đình chùa bị hỏng thì theo tập quán Việt Nam, các công trình này có cửa chính hướng về phía Đông Nam.



Hình 4-2

Sau đây chúng ta lại tưởng tượng có người gặp phải hoàn cảnh tuyệt vọng. Ông ta đi trong sa mạc mênh mông, xung quanh đương nhiên là không có cây cối, công trình. Mặt Trời chói chang, bãi cát nóng bỏng. Trong giờ phút này nếu ai đó mách bảo với ông ta rằng, cái đồng hồ đeo trên tay ông ta chính là "Kim chỉ Bắc" tiêu chuẩn đấy thì ông ta nhất định sẽ vui mừng khôn xiết.

Trong bạn đọc, chắc có người còn ngờ vực điều này nhưng sự thực đúng là như vậy. Phương pháp định hướng của đồng hồ là: Đặt đồng hồ nằm như hình 4-3, lấy vị trí một nửa số giờ (một ngày tính bằng 24 giờ) của kim giờ quay về phía Mặt Trời thì hướng chỉ "12 giờ" trên đồng hồ là hướng Bắc. Chẳng hạn, thời gian thể hiện trên đồng hồ là 8 giờ 05 phút sáng. Vậy vị trí một nửa số giờ của nó là 4 giờ 2 phút 30 giây. Quay vị trí này về phía Mặt Trời thì hướng N (Bắc) là hướng "12 giờ" chỉ trên đồng hồ. Cần chú ý là quay về phía Mặt Trời phải chính xác. Để nâng cao độ chính xác, chúng ta dùng 1 que diêm hay cái tăm dựng ở vị trí "một nửa số giờ" để bóng của nó qua tâm của mặt đồng hồ. Điều này chứng tỏ chúng ta đã ngắm đúng phương Mặt Trời.



Hình 4-3

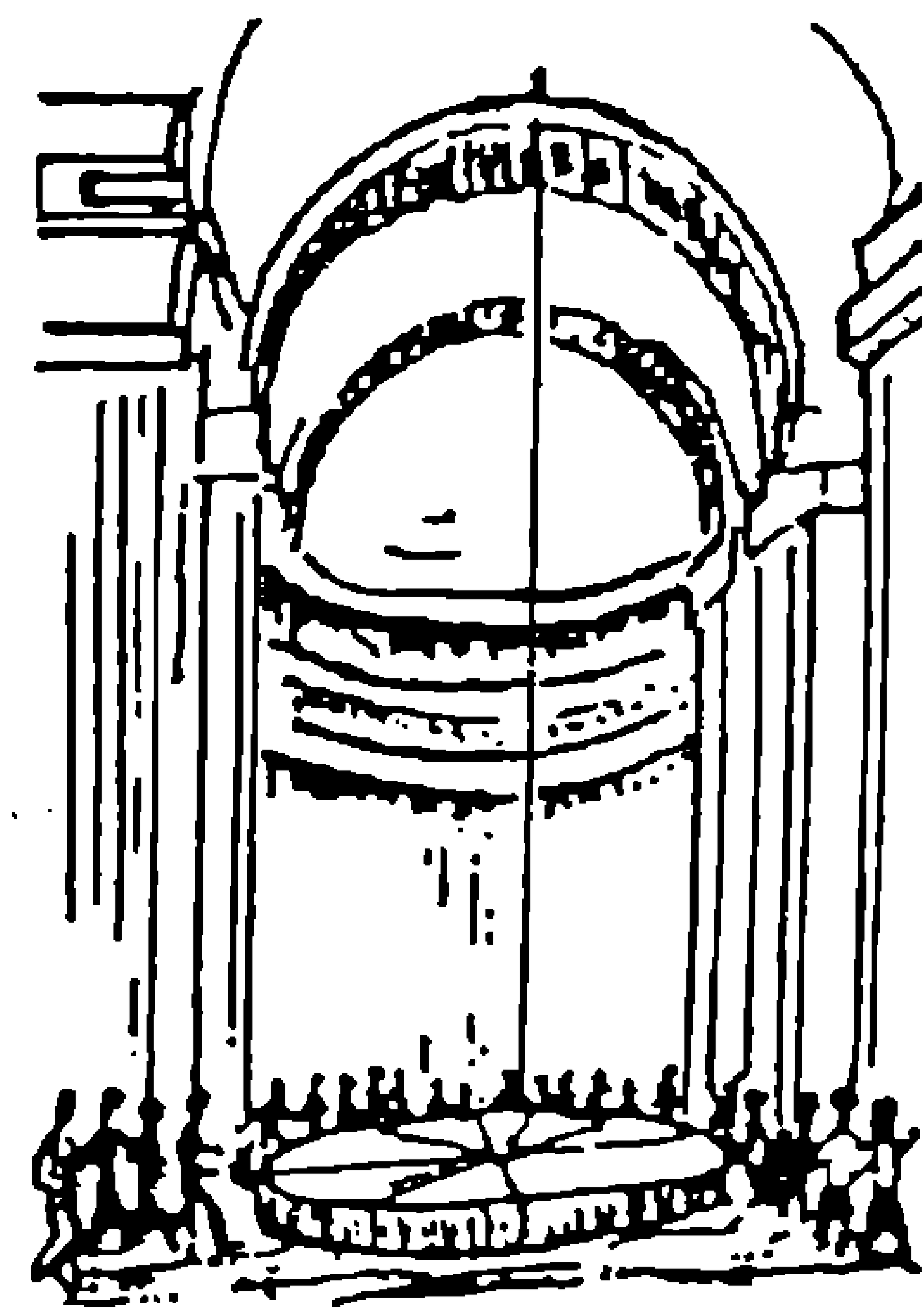
Bạn hãy dùng đồng hồ của mình thử vài lần, ghi nhớ phương pháp này, biết đâu lúc nào đó sẽ phải dùng đến.

Chúng tôi nghĩ rằng, chắc bạn đọc rất muốn biết lý lẽ khoa học của việc định hướng bằng đồng hồ. Điều này không khó, chẳng qua muốn làm rõ nó thì phải hiểu được Trái Đất tự quay quanh nó.

Ngày nay hầu như tất cả học sinh trung học đều hiểu rằng, có ngày và đêm là do Trái Đất tự quay quanh nó. Tuy vậy, ngày xưa nhiều người nửa tin nửa ngờ về điều này. Mãi đến năm 1805 viện sĩ Mexio ở Viện khoa học France còn viết như sau: "Các nhà thiên văn học muốn làm tôi tin rằng Trái Đất giống như một con gà quay xiên qua một thanh sắt để quay, đó quả thật là một dụng ý uổng công". Song nhận thức của vị học giả khá nổi tiếng này không thể ngăn cản Trái Đất tự quay quanh nó.

Năm 1851, nhà khoa học Zoanche người Pháp đã làm một thí nghiệm và biểu diễn trực tiếp để chứng minh là Trái Đất tự quay quanh nó. Ông treo một chiếc chuông và cho lắc trên một sa bàn đặt trên mặt đất (hình 4-4) thì chuông sẽ vẽ ra các đường vân. Về sau, thí nghiệm này được gọi là con lắc Zoanche.

Tuy con lắc này cũng giống như những con lắc khác, không ngừng lắc qua lắc lại cùng một phương trên cùng một mặt phẳng, nhưng Trái Đất tự quay quanh nó cực kỳ chậm chạp nên các đường vân vạch ra trên sa bàn cũng chỉ thay đổi phương một cách chậm chạp nhưng đều đặn, từ Đông sang Tây. Thời gian cần cho mặt lắc của con lắc quay được một vòng có liên quan tới vĩ độ tại chỗ biểu diễn: Khi cực điểm cần 24 giờ thì ở Paris cần 31 giờ 47 phút, ở Bắc Kinh cần 37 giờ 15 phút.

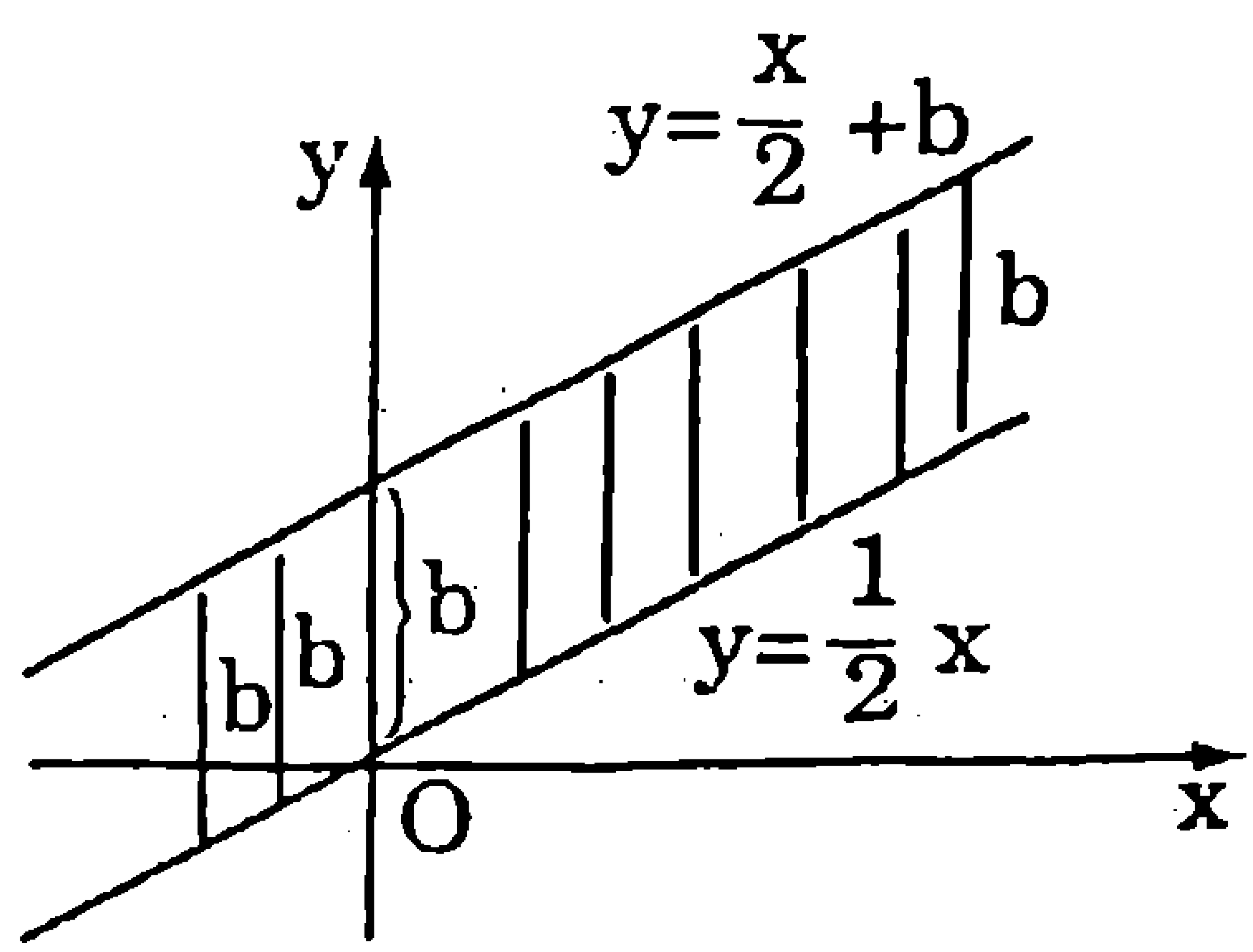


Hình 4-4

Biểu diễn của Zoanche làm cho chúng ta thấy rõ Trái Đất tự quay đều quanh nó. Trái Đất quay một vòng quanh nó nhưng trong hiện tượng giả của thị giác con người hình như Mặt Trời quay quanh Trái Đất 360°. Đồng thời với điều này, kim giờ trên mặt đồng hồ chạy được 24 giờ, quay quanh trục đồng hồ 720°. Do chuyển động cả hai đều là chuyển động đều, từ đó góc độ y của Mặt Trời quay quanh Trái Đất với một nửa góc độ x của kim giờ quay trên mặt đồng hồ, phải đồng bộ. Điều này chứng tỏ rằng, sau khi chọn góc khởi đầu của các tính toán riêng cần có:

$$y = \frac{1}{2}x + b \tag{4-2}$$

Đây là hàm số bậc nhất đơn giản. Đồ thị của (4-2) là một đường thẳng. Hệ số $k = \frac{1}{2}$ của x gọi là *độ nghiêng của đường thẳng* (hay hệ số góc của đường thẳng so với chiều dương của trục hoành); b gọi là *khoảng cách cắt*, không đổi, vừa bằng khoảng cách từ gốc đến điểm cắt giữa đường thẳng và trục Oy (hình 4-5).



Hình 4-5

Chuyển vế (4-2) ta được:

$$y - \frac{1}{2}x = b \tag{4-3}$$

Điều này có nghĩa là trong thị giác con người, giữa góc của Mặt Trời quay và nửa góc quay của kim giờ, độ lệch là một đại lượng không đổi. Khi hướng một nửa số giờ về phía Mặt Trời thì vị trí của đồng hồ là cố định, không thay đổi theo sự xô dịch của thời gian và sự mọc - lặn của Mặt Trời. Lúc 6 giờ sáng Mặt Trời mọc ở phương Đông, chúng ta lấy "3" là một nửa của "6" đặt đúng về phía Mặt Trời thì hướng mà "12" chỉ đúng là hướng Bắc (N). Hướng này trong chuyển động đồng thời của Mặt Trời và kim đồng hồ, giữ cố định. Đây chính là nguyên lý khoa học của "đồng hồ định hướng" vừa nêu ở trên.

5. BÍ ẨN CỦA THỨ TRONG TUẦN

Lịch Can Chi với một vòng (chu kỳ) 60 năm được phát minh ở Trung Quốc từ năm 2636 trước Công Nguyên, đến năm 1984 thì bước sang vòng thứ 78.

Can có nghĩa là thân cây, cốt yếu của Trời, nên gọi là *Thiên Can*. Can có quan hệ với Lưỡng Nghi, Ngũ Hành và phối hợp lại mà thành *Thập Can* (2 × 5 = 10). Có thuyết cho rằng, 10 can xuất xứ từ việc gấp đôi số lẻ 5 ở giữa các số lẻ mà thành.

Mười Can là 1 giáp (1 chu kỳ) hàng Can, gọi tên theo thứ tự như bảng 5-1.

Bảng 5-1

Mười Can	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ	Canh	Tân	Nhâm	Quý
Thứ tự	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Người ta quy định Can lẻ (1, 3, 5, 7 và 9) là dương, Can chẵn (2, 4, 6, 8, 10) là âm.

Chi có nghĩa là cành cây, có quan hệ với Đất, nên gọi là *Địa Chi*. Chi có quan hệ với Lưỡng Nghi, Lục Khí và phối hợp lại mà thành *Thập nhị chi* (2 × 6 = 12). Có thuyết cho rằng, 12 chi bắt nguồn từ việc gấp đôi số chẵn 6 ở giữa các số chẵn mà thành.

Mười hai chi là 1 giáp (1 chu kỳ) hàng Chi, gọi tên theo thứ tự và ứng với các con vật như bảng 5-2.

Bảng 5-2

Mười hai Chi	Tý	Sửu	Dần	Mão	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi	Thân	Dậu	Tuất	Hợi
Thứ tự	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ứng với	Chuột	Trâu	Hổ	Mèo	Rồng	Rắn	Ngựa	Dê	Khỉ	Gà	Chó	Lợn

Các Chi lẻ (1, 3, 5, 7, 9 và 11) là dương, các Chi chẵn (2, 4, 6, 8, 10 và 12) là âm.

Dùng 12 con vật để chỉ 12 Chi xuất hiện từ thời Đông Hán (khoảng năm 103).

Để lập Can Chi, người ta đề ra nguyên tắc "đồng tính", tức là Can lẻ (dương) phối hợp với Chi lẻ (dương); Can chẵn (âm) phối hợp với Chi chẵn (âm). Như vậy, cứ 6 lần 10 Can và 5 lần 12 Chi thì được 1 vòng Can Chi (còn gọi là vòng Lục Giáp, vòng Giáp Tý,...). Thực chất vòng Can Chi là bội số chung nhỏ nhất của 10 và 12, bằng 60 chứ không phải 1 chu kỳ thiên nhiên của Trời - Đất và gọi là Lục thập Giáp Tý, Lục thập Hoa Giáp, Nạp âm ngũ hành,...

Như vậy, vòng Can Chi là hệ đếm cơ số 60. Đây là phép đếm số thứ tự độc đáo, cũng như cách đếm 1, 2, 3,... hoặc A, B, C,... thể hiện những ký hiệu ghi chép thời gian trong lịch pháp cổ.

Vòng Can Chi dùng để ghi năm, tháng, ngày, giờ trong *lịch Can Chi*, còn gọi là *lịch vạn niên* (không phải là *lịch vạn sự*), Hoàng lịch thông thư, Hiệp kỷ biện thông thư, Ngọc hạp thông thư, Vạn bảo toàn thư, Hiệp kỷ lịch, Tuyển trạch nhật,...

Người ta đã lập bảng đối chiếu các năm Can Chi theo năm dương lịch và ngược lại, hoặc có thể tính như sau:

Cách 1. Lấy năm dương lịch trừ đi 3, dùng chữ số của hàng đơn vị tra bảng thứ tự Can (bảng 5-1) được hàng Can. Trường hợp chữ số của hàng đơn vị là 0 thì dùng 10.

Lấy số đã trừ 3 ở trên chia cho 12, dùng số dư (≤ 12) tra bảng thứ tự Chi (bảng 5-2) được hàng Chi.

Ví dụ, tính cho năm 1431, ta có:

$$1431 - 3 = 1428$$

Dùng 8 tra bảng 5-1, ta được Tân.

$$1428 : 12 = 119$$

tức là $1428 \equiv 12 \pmod{12}$[1]

Dùng 12 tra bảng 5-2 ta được Hợi.

Như vậy năm 1431 là năm Tân Hợi.

Cách 2. Lấy năm dương lịch trừ 3, còn lại chia cho 60, dùng số dư (≤ 60) tra bảng mã số vòng Can Chi (bảng 5-3) sẽ được năm Can Chi cần tìm.

Bảng 5-3

1 Giáp Tý	2 Ất Sửu	3 Bính Dần	4 Đinh Mão	5 Mậu Thìn	6 Kỷ Tỵ	7 Canh Ngọ	8 Tân Mùi	9 Nhâm Thân	10 Quý Dậu
11 Giáp Tuất	12 Ất Hợi	13 Bính Tý	14 Đinh Sửu	15 Mậu Dần	16 Kỷ Mão	17 Canh Thìn	18 Tân Tỵ	19 Nhâm Ngọ	20 Quý Mùi
21 Giáp Thân	22 Ất Dậu	23 Bính Tuất	24 Đinh Hợi	25 Mậu Tý	26 Kỷ Sửu	27 Canh Dần	28 Tân Mão	29 Nhâm Thìn	30 Quý Tỵ

[1] mod đã được nói đến ở cuốn "Những câu chuyện lý thú về logic".

31 Giáp Ngọ	32 Ất Mùi	33 Bính Thân	34 Đinh Dậu	35 Mậu Tuất	36 Kỷ Hợi	37 Canh Tý	38 Tân Sửu	39 Nhâm Dần	40 Quý Mão
41 Giáp Thìn	42 Ất Tỵ	43 Bính Ngọ	44 Đinh Mùi	45 Mậu Thân	46 Kỷ Dậu	47 Canh Tuất	48 Tân Hợi	49 Nhâm Tý	50 Quý Sửu
51 Giáp Dần	52 Ất Mão	53 Bính Thìn	54 Đinh Tỵ	55 Mậu Ngọ	56 Kỷ Mùi	57 Canh Thân	58 Tân Dậu	59 Nhâm Tuất	60 Quý Hợi

Ví dụ, tính cho năm 1431, ta có:

$$1431 - 3 = 1428$$

$$1428 \equiv 48 \pmod{60}$$

Dùng 48 tra bảng 5-3 được năm Tân Hợi.

Cách 3. Lấy năm dương lịch, chia cho 60, dùng số dư (≤ 60) tra bảng 5-4 sẽ được năm Can Chi cần tìm.

Bảng 5-4

Chi Can	Tý	Sửu	Dần	Mão	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi	Thân	Dậu	Tuất	Hợi
Giáp	4		54		44		34		24		14	
Ất		5		55		45		35		25		15
Bính	16		6		56		46		36		26	
Đinh		17		7		57		47		37		27
Mậu	28		18		8		58		48		38	
Kỷ		29		19		9		59		49		39
Canh	40		30		20		10		60		50	
Tân		41		31		21		11		1		51
Nhâm	52		42		32		22		12		2	
Quý		53		43		33		23		13		3

Ví dụ, tính cho năm 1431, ta có:

$$1431 \equiv 51 \pmod{60}$$

Dùng 51 tra bảng 5-4 được năm Tân Hợi.

Cách 4. Từ năm dương lịch, cần tính ra năm dương lịch N của thế kỷ XXI theo công thức:

$$DL + 60.n = N \tag{5-1}$$

trong đó n - số vòng Can Chi để N là các năm của thế kỷ XXI.

Dùng chữ số hàng chục và hàng đơn vị của N tra cột chục và hàng đơn vị của bảng 5-5 sẽ được Chi. Dùng Chi đó chiếu ra cột can sẽ được hàng Can. Như vậy, ta sẽ được năm Can Chi.

Ví dụ, tính cho năm 1431, ta có:

$$1431 + 60 \times 10 = 2031$$

Dùng 3 (hàng chục) và 1 (hàng đơn vị) tra bảng 5-5 được Hợi. Dùng Hợi chiếu ra cột Can sẽ được Tân. Vậy năm 1431 là năm Tân Hợi.

Bảng 5-5

Can	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Chục / Đơn vị
Canh	Thìn	Dần	Tý	Tuất	Thân	Ngọ	Thìn	Dần	Tý	Tuất	0
Tân	Tỵ	Mão	Sửu	Hợi	Dậu	Mùi	Tỵ	Mão	Sửu	Hợi	1
Nhâm	Ngọ	Thìn	Dần	Tý	Tuất	Thân	Ngọ	Thìn	Dần	Tý	2
Quý	Mùi	Tỵ	Mão	Sửu	Hợi	Dậu	Mùi	Tỵ	Mão	Sửu	3
Giáp	Thân	Ngọ	Thìn	Dần	Tý	Tuất	Thân	Ngọ	Thìn	Dần	4
Ất	Dậu	Mùi	Tỵ	Mão	Sửu	Hợi	Dậu	Mùi	Tỵ	Mão	5
Bính	Tuất	Thân	Ngọ	Thìn	Dần	Tý	Tuất	Thân	Ngọ	Thìn	6
Đinh	Hợi	Dậu	Mùi	Tỵ	Mão	Sửu	Hợi	Dậu	Mùi	Tỵ	7
Mậu	Tý	Tuất	Thân	Ngọ	Thìn	Dần	Tý	Tuất	Thân	Ngọ	8
Kỷ	Sửu	Hợi	Dậu	Mùi	Tỵ	Mão	Sửu	Hợi	Dậu	Mùi	9

Ghi năm theo vòng Can Chi được bắt đầu từ Tây Chu cộng hoà nguyên niên (khoảng năm 841 trước Công nguyên). Các năm ứng với 12 con vật được bắt đầu từ năm Giáp Tý đời Hoàng Đế (ông vua truyền thuyết của Trung Quốc) và gọi là Can Chi ký niên.

Dùng 12 con vật để ghi tháng gọi là "Can Chi ký nguyệt", với chu kỳ 5 năm (60 tháng). Tháng Tý là tháng nào trong năm, thì đã thay đổi nhiều lần, tuỳ từng loại lịch. Chẳng hạn, đời Chu lấy tháng Tý là tháng đầu năm, đời Tần lấy tháng Tý là tháng Hai,... Hiện nay, Việt Nam ta áp dụng theo quy định từ thời Đông Hán (năm 103), tháng Tý là tháng có Đông Chí, tức là tháng Mười một âm lịch và các tháng trong năm cố định (bảng 5-6).

Bảng 5-6

Tháng	Giêng	Hai	Ba	Bốn	Năm	Sáu	Bảy	Tám	Chín	Mười	M. Một	M. Hai
Chi	Dần	Mão	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi	Thân	Dậu	Tuất	Hợi	Tý	Sửu

Các năm nhuận có tên gọi tháng nhuận như tháng chính.

Cách ghép Can vào tên tháng theo quy tắc sau đây:

Những năm Giáp, Kỷ thì Can của tháng Giêng là Bính,

Những năm Ất, Canh thì Can của tháng Giêng là Mậu,

Những năm Bính, Tân thì Can của tháng Giêng là Canh,

Những năm Đinh, Nhâm thì Can của tháng Giêng là Giáp.

Khi đã có Can Chi của tháng Giêng thì các tháng khác ghép theo thứ tự đã nêu, đủ 12 tháng trong năm.

Cũng vào thời Đông Hán, người ta dùng Can Chi để ghi ngày, gọi là "Can Chi ký nhật". Các ngày Can Chi có trong các lịch thông thường.

Dùng Can Chi để ghi giờ, gọi là "Can Chi ký thời". Một ngày chia làm 12 giờ (thời), ứng với 12 chi, mỗi giờ Can Chi bằng hai giờ thông thường. Mỗi ngày bắt đầu từ giờ Tý, tức là sau 23 giờ đến 1 giờ (chính Tý lúc 0 giờ), giờ Ngọ từ 11 giờ đến 13 giờ (chính Ngọ lúc 12 giờ).

Dùng vòng Can Chi để ghi thời gian thì vài nghìn năm mới có sự trùng lặp cả năm, tháng, ngày và giờ. Có lẽ ít nhất là 5 năm mới có ngày, tháng, năm đều là Giáp Tuất như thứ bảy ngày 15/10/1994 (11 tháng Chín).

Khoảng hơn 10 thế kỷ trước Công nguyên, Trung Quốc đã dùng "tuần 10 ngày" (tuần nhật chế), ba tuần là 1 tháng, vừa bằng nửa "hoa Giáp Tý". Điều thú vị là, Ai Cập cổ đại cũng dùng "tuần 10 ngày". Phải chăng đều do hai bàn tay con người có 10 ngón?!

Ngày 7/3/321, hoàng đế Junstantin của La Mã cổ đại đã chính thức tuyên bố dùng "chế độ thứ" với "tuần 7 ngày" và lấy ngày đó làm thứ hai. Điều này có lẽ bắt nguồn từ việc người La Mã cổ đại lúc đó đã biết 7 hành tinh: Nhật (Mặt Trời), Nguyệt (Mặt Trăng), Kim, Mộc, Thuỷ, Hoả và Thổ. Họ đã dùng mỗi hành tinh bảo hộ cho mỗi ngày trong tuần (ngày tuần lễ, thứ trong tuần) như bảng 5-7.

Bảng 5-7

Hành tinh	Mặt Trời	Mặt Trăng	S. Hoả	S. Thuỷ	S. Mộc	S. Kim	S. Thổ
Ký hiệu							
Ngày thứ	Chủ nhật	Ngày thứ 1	Ngày thứ 2	Ngày thứ 3	Ngày thứ 4	Ngày thứ 5	Ngày thứ 6
Thứ trong tuần	Chủ nhật	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy

Trong cuốn *Những câu chuyện lý thú về giới hạn* đã nói về năm nhuận. Ở đó ta đã thấy một "năm Mặt Trời" (năm Xuân phân, năm thời tiết) không phải là 365 ngày chẵn, mà là 365,242199 ngày (365 ngày 5 giờ 48 phút 46 giây). Để tránh phần thập phân này, cứ 4 năm người ta lại cho 1 năm nhuận. Năm nhuận dương lịch có tháng nhuận là tháng 2, tức là tháng 2 năm nhuận có 29 ngày chứ không phải 28 ngày như bình thường. Như vậy, năm nhuận có 366 ngày. Nhưng như vậy thì cứ 100 năm lại quá mất 1 ngày, vì vậy người ta lại quy định năm nhuận là năm chia hết cho 4 nhưng nếu năm có hai chữ số cuối cùng là 00 thì phải chia hết cho 400. Tuy vậy, vẫn còn sự chênh lệch nhỏ: cứ 3300 năm lại chênh hơn 1 ngày, do vậy người ta đã tính được rằng, đến năm 4582 thì phải bớt 1 ngày.

Việc đặt nhuận chắc chắn là làm tăng khó khăn cho chúng ta khi tính toán thứ trong tuần. Để vạch ra bí ẩn về thứ trong tuần, chúng ta còn cần một công cụ toán học đơn giản là hàm số Gauss.

Năm 1800, nhà toán học Carl Friedrich Gauss (30/4/1777 - 23/2/1855) người Đức nghiên cứu điểm chẵn trong vòng tròn, đã đưa vào hàm số:

$$y = [x] \qquad (5\text{-}2)$$

trong đó [x] biểu thị phần nguyên của x, chẳng hạn:

$[x] = 3$

$[-4,75] = -5$

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] = 1$$

Hàm số (5-2) về sau được gọi là hàm số Gauss hay hàm phần nguyên.

C.F. Gauss

Theo định nghĩa, [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, nghĩa là:

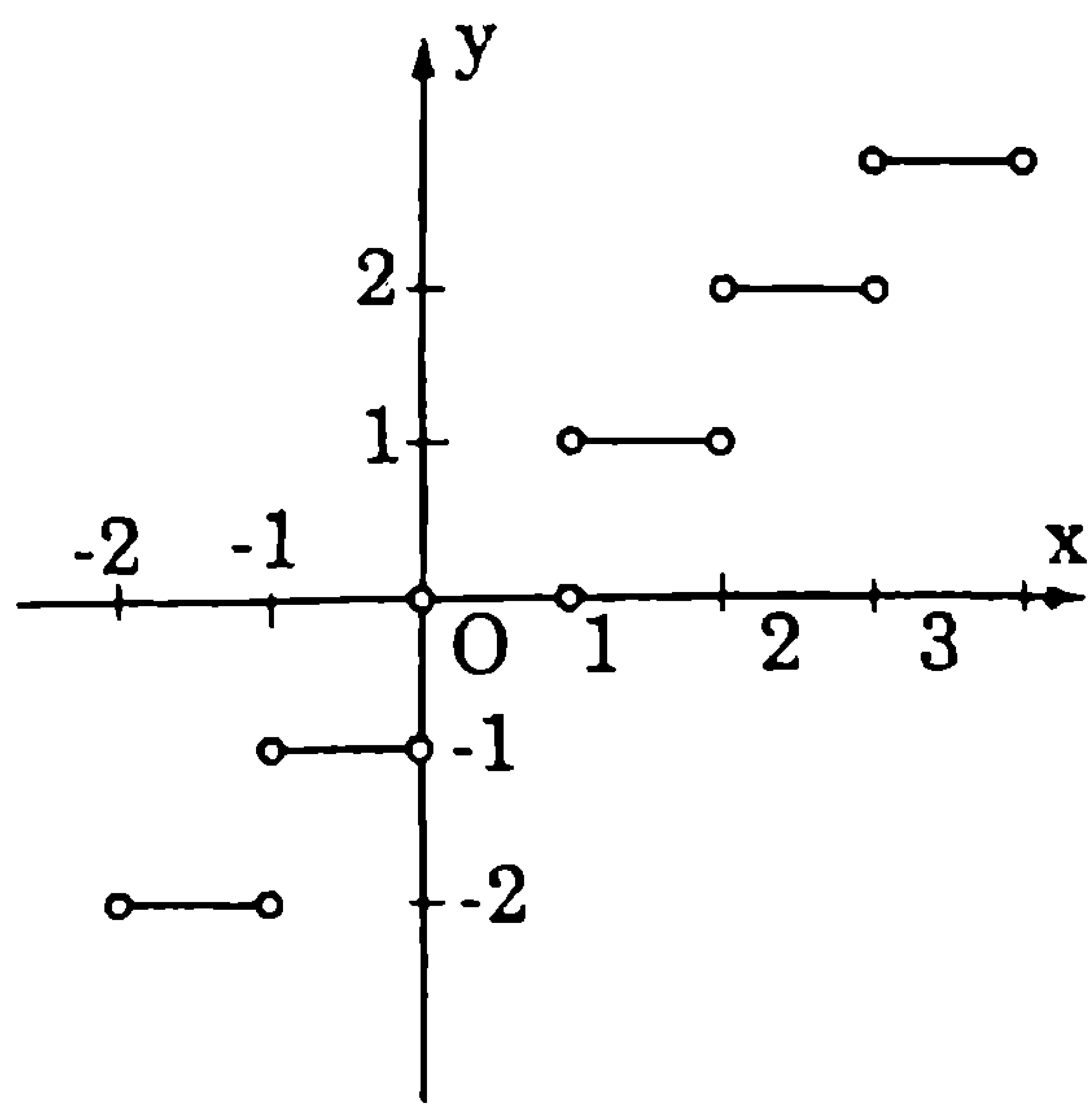
$$[x] \le x < [x] + 1$$

Đây là hàm số rất đặc biệt, giống như những bậc thang nhưng không liên tục (hình 5-1).

Sử dụng hàm số Gauss chúng ta có thể căn cứ quy luật đặt nhuận để tính toán ra số ngày y năm x là thứ mấy trong tuần. Ở đây đại lượng biến đổi x là số năm, đại lượng biến đổi y là số ngày từ nguyên đán năm ấy đến ngày cần tìm thứ trong tuần (bao gồm cả ngày đó). Các nhà lịch pháp đã tìm ra công thức liên hệ:

$$s = x - 1 + \left[\frac{x-1}{4}\right] - \left[\frac{x-1}{100}\right] + \left[\frac{x-1}{400}\right] + y \qquad (5\text{-}3)$$

Theo (5-3), sau khi tìm ra s thì chia cho 7. Nếu chia vừa hết thì ngày đó là chủ nhật, chia có dư thì số dư đó chính là ngày thứ mấy trong tuần. Muốn biết ngày đó là thứ mấy thì lấy ngày thứ mấy cộng thêm 1 (bảng 5-7).



Hình 5-1

Ví dụ, ngày mà hoàng đế Junstantin tuyên bố dùng "chế độ thứ" là ngày 7/3/321, ngày đó là thứ mấy?

Ta có:

$$x - 1 = 321 - 1 - 320$$

$$y = 31 + 28 + 7 = 66$$

Từ (5-3), ta tính:

$$s = 320 + \frac{320}{4} - \frac{320}{100} + \frac{320}{400} + 66$$

$$= 320 + 80 - 3 + 0 + 66 = 463 \equiv 1 \pmod 7$$

Theo bảng 5-7 thì ngày đó là ngày thứ hai, đúng như quy định.

Bây giờ ta tính cho ngày đầu thiên niên kỷ thứ ba là thứ mấy?

Ta có:

$$x - 1 = 2001 - 1 = 2000;$$

$$y = 1,$$

Từ (5-3) ta tính:

$$s = 2000 + \frac{2000}{4} - \frac{2000}{100} + \frac{2000}{400} + 1$$

$$= 2000 + 500 - 20 + 5 + 1 = 2486 \equiv 1 \pmod 7$$

Vậy ngày 1/1/2001 cũng là ngày thứ hai (ngày thứ 1 theo người Trung Quốc).

Ta tính thêm cho một trường hợp nữa, đó là Ngày Quốc tế thiếu nhi 1/6/2001.

Ta có:

$$x - 1 = 2001 - 1 = 2000;$$

$$y = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 1 = 152.$$

Như vậy, muốn tính y thì cần nhớ từng tháng dương lịch có bao nhiêu ngày (bảng 5-8).

Bảng 5-8

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số ngày	31	28(29)	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Từ (5-3), ta tính:

$$s = 2000 + \frac{2000}{4} - \frac{2000}{100} + \frac{2000}{400} + 152 = 2637 \equiv 5 \pmod 7$$

Vậy ngày 1/6/2001 là ngày thứ sáu.

Cần lưu ý rằng, nếu đã biết thứ của ngày đầu năm dương lịch thì chỉ cần tính y. Chẳng hạn, tính cho 1/6/2001. Ta có:

$$y = 152 \equiv 5 \pmod 7$$

Mà ngày 1/1/2001 là thứ hai, do vậy ngày 1/6/2001 là thứ sáu.

Có một điều các bạn cần nhớ là, đối với năm bình thường thì ngày 1 tháng 1, 30 tháng 4 và 31 tháng 12 đều cùng một thứ. Nếu là năm nhuận thì 30 tháng 4 và 31 tháng 12 lùi một thứ so với 1 tháng 1.

Một cách khác để tính thứ trong tuần như sau:

1. Để tính cho thời gian từ năm 1580 (năm toàn thế giới dùng lịch Gregory) đến tháng 2/1900, ta dùng thuật toán đơn giản khi tính lịch này:

$$\begin{cases} G = N + \{2,6\,(T+1) + 5,25A + 1,25\,B\} \\ t \equiv G \pmod 7 \end{cases} \qquad (5\text{-}4)$$

Trong đó:

N - ngày;

T - tháng;

A - hai số đầu của năm;

B - hai số cuối của năm;

G (mod 7) - số dư của G sau khi chia 7;

t - thứ trong tuần:

$t = 0$ tức thứ 7;

$t = 1$ tức chủ nhật;

$t = 2$ tức thứ 2.

Riêng tháng 1 và tháng 2 thì đổi thành tháng 13 và tháng 14, số năm phải trừ đi 1.

2. Để tính cho thời gian từ tháng 3/1900 đến tháng 12/1999 thì dùng:

$$G = N + 2{,}6\,(T + 1) + 1{,}25B + 1 \qquad (5\text{-}5)$$

Chẳng hạn, tính cho ngày 6/1/1946, ta có:

$$G = 6 + 2{,}6\,(13 + 1) + 1{,}25 \times 45 + 1 = 99$$

$$t \equiv 99 \pmod 7 = 1$$

tức là chủ nhật.

3. Để tính cho thời gian từ tháng 1/2000 đến tháng 12/2099 thì dùng:

$$G = N + 2{,}6\,(T + 1) + 1{,}25B \qquad (5\text{-}6)$$

Chẳng hạn, tính cho ngày 2/9/2002, ta có:

$$G = 2 + 2{,}6\,(9 + 1) + 1{,}25 \times 2 = 30;$$

$$t \equiv 30 \pmod 7 = 2$$

tức là chủ nhật.

Năm 1703, nhà toán học Leonchi Filippovits Matnhixki (1669 - 1739) người Nga có đưa ra trong cuốn "Số học" bài toán như sau: Các ngày trong tuần được đánh số từ 1 đến 7. Một người nào đó chọn một số bất kỳ trong 7 số đó và cho bạn biết kết quả sau khi đã thực hiện với các trường hợp sau đây:

1. Nhân với 2;

2. Cộng với 6;

3. Nhân tổng vừa có với 50, bạn sẽ lập tức biết người đó đã chọn số nào.

Tại sao bạn lại biết nhanh như vậy? Ta thử xem. Giả sử số người đó chọn là x. Ta có:

$2x$

$2x + 5$

$(2x + 5)50 = 100x + 250$

Như vậy, khi bạn biết kết quả, chỉ cần dùng kết quả đó trừ đi 250 sẽ được 100x. Biết 100x thì việc xác định x là không có gì khó.

Sau đây chúng ta xem một câu chuyện có ý châm biếm:

Thế giới vô biên, rất nhiều cái lạ. Năm 1654, sau khi "cơm no, rượu say", Tổng giám mục Usuore người Ireland bỗng nảy ra ý nghĩ kỳ quặc là định thông qua kinh điển để "khảo chứng" sự hình thành Trái Đất.

Quả nhiên, ít lâu sau Usuore đưa về đống sách kinh điển chữ Hébreux, làm một trò chơi chữ viết mà chỉ có một mình ông ta biết. Trải qua nhiều đêm, không biết linh cảm từ đâu đến, ông ta đưa ra kết luận như sau: Trái Đất được Thượng Đế sáng tạo ra lúc 9 giờ sáng ngày 26 (chủ nhật) tháng 10 năm 4004 trước Công nguyên!

Luận điểm của Usuore làm cho cả thế giới kinh hoàng. Nhưng nó phù hợp với ý muốn của một số người trong giáo hội, nên đã làm ầm ĩ một thời. Song các nhà khoa học chân chính không những không bị những lời xằng bậy lừa gạt mà bằng những thành quả khoa học đã nghiên cứu được, trả lời một cách đanh thép rằng: Trái Đất của chúng ta đã tồn tại 4,6 tỷ năm rồi!

Có một điểm liên quan đến mục này: Usuore tuy thông hiểu về thần học nhưng trình độ toán học của Usuore lại có hạn! Bởi vì, ngày 26/10/4004 trước Công nguyên hoàn toàn không phải là ngày chủ nhật Usuore nói. Bạn đọc có thể dùng toán học mà bóc trần trò bịp của Usuore. Cần chú ý là năm 4004 trước Công nguyên là năm nhuận, tháng 2 năm đó có 29 ngày.

6. HIỆU ỨNG SỐ MŨ THẦN KỲ

Thời gian: một ngày tháng 7/1752.

Địa điểm: một cánh đồng hoang ngoại thành Pei nước Mỹ.

Bầu trời u ám, cuồng phong giận giữ, mây đen cuồn cuộn, trên trời tiếng sét đinh tai, chớp giật như kiếm sắc chém vào không trung rạch nát bầu trời! Mưa bắt đầu rơi, mọi người nhốn nháo chạy vào nhà tránh mưa. Trong hỗn loạn, mọi người thấy có một người trung niên dắt một cậu bé, đội mưa gió, bước khó nhọc về phía cánh đồng hoang. Trên tay người trung niên cầm một cái diều lớn. Về sau mọi người mới biết đây là một cái diều đặc biệt: Mặt làm bằng lụa, bên trên buộc một sợi dây thép, sợi dây đay thả diều buộc vào sợi dây thép này, đầu dưới của sợi dây đay treo một chùm chìa khoá đồng. Sau này ông ta kể lại rằng, khi diều bay lên cao theo gió, mưa cũng dần nặng hạt, bỗng trên trời loé lên một ánh chớp và ông ta thấy trong người run rẩy, tay ông cảm thấy tê buốt. Ông ta đưa ngón tay gần sát chùm chìa khoá, thấy khoảng giữa ngón tay và chùm chìa khoá loé lên những tia lửa màu lam. Ông ta hốt hoảng hét lớn: "Tôi bị điện giật rồi! Rốt cuộc tôi cũng chứng minh được chớp cũng là điện rồi!".

Câu chuyện kể trên là "thực nghiệm thành Pei" nổi tiếng trong lịch sử khoa học. Người trung niên làm thực nghiệm này là nhà khoa học trứ danh người Mỹ, người phát minh ra kim thu lôi (năm 1750) đó là Beniamin Franklin (17/4/1706 - 1790). Đứa trẻ là con của ông.

Cả đời B.Franklin làm việc cho khoa học và cho cách mạng dân chủ. Tài sản của ông để lại sau khi qua đời thật không đáng kể, tổng cộng chỉ có khoảng một nghìn bảng Anh. Điều làm người ta kinh ngạc là ông đã để lại một bản di chúc phân phối tài sản mấy triệu bảng Anh! Bản di chúc thú vị này viết như sau:

"... Một nghìn bảng Anh này tặng cho cư dân Boston, nếu họ nhận một nghìn bảng Anh này thì món tiền này nên phó thác cho những công dân được lựa chọn ra, họ đem lãi suất 5% mỗi năm của số tiền này cho các nhà thủ công nghiệp trẻ để làm cho nó sinh sôi. Món tiền này sau 100 năm sẽ tăng lên đến 131000 bảng Anh. Tôi hy vọng, lúc đó dùng 100000 bảng Anh để xây dựng một công trình công cộng, 31000 bảng Anh còn lại đem đi tiếp tục sinh sôi 100 năm nữa. Sau 100 năm thứ hai, món tiền này tăng đến 4061000 bảng Anh, trong đó 1061000 bảng Anh vẫn do cư dân Boston sử dụng, 3000000 bảng Anh còn lại để công chúng của bang Mashachu quản lý. Sau lần này, tôi không dám định liệu nữa".

B.Franklin mất năm 1790, kỳ hạn cuối cùng thực hiện di chúc của ông đã đến hạn trước lúc xuất bản cuốn sách này. Tuy vậy, bạn đọc không kìm hãm được phải hỏi: Với tư cách là một nhà khoa học như B.Franklin, để lại 1000 bảng Anh nhỏ nhoi, lại lập một di chúc như trăm nghìn phú ông, phải chăng là ông đã điên rồi! Chúng ta hãy tính toán thực tế một chút theo thiết tưởng phi phàm của ông. Hãy xem bảng 6-1.

Bảng 6-1

Kỳ hạn	**Ký hiệu**	**Số di sản (bảng Anh)**
Ban đầu	A_0	1000
Cuối năm thứ 1	A_1	$A_0(1+5\%)$
Cuối năm thứ 2	A_2	$A_0(1+5\%)^2$
...	...	...
Cuối năm thứ 100	A_{100}	$A_0(1+5\%)^{100}$
Cuối năm thứ n	A_n	$A_0(1+5\%)^n$

Từ bảng 6-1, ta có:

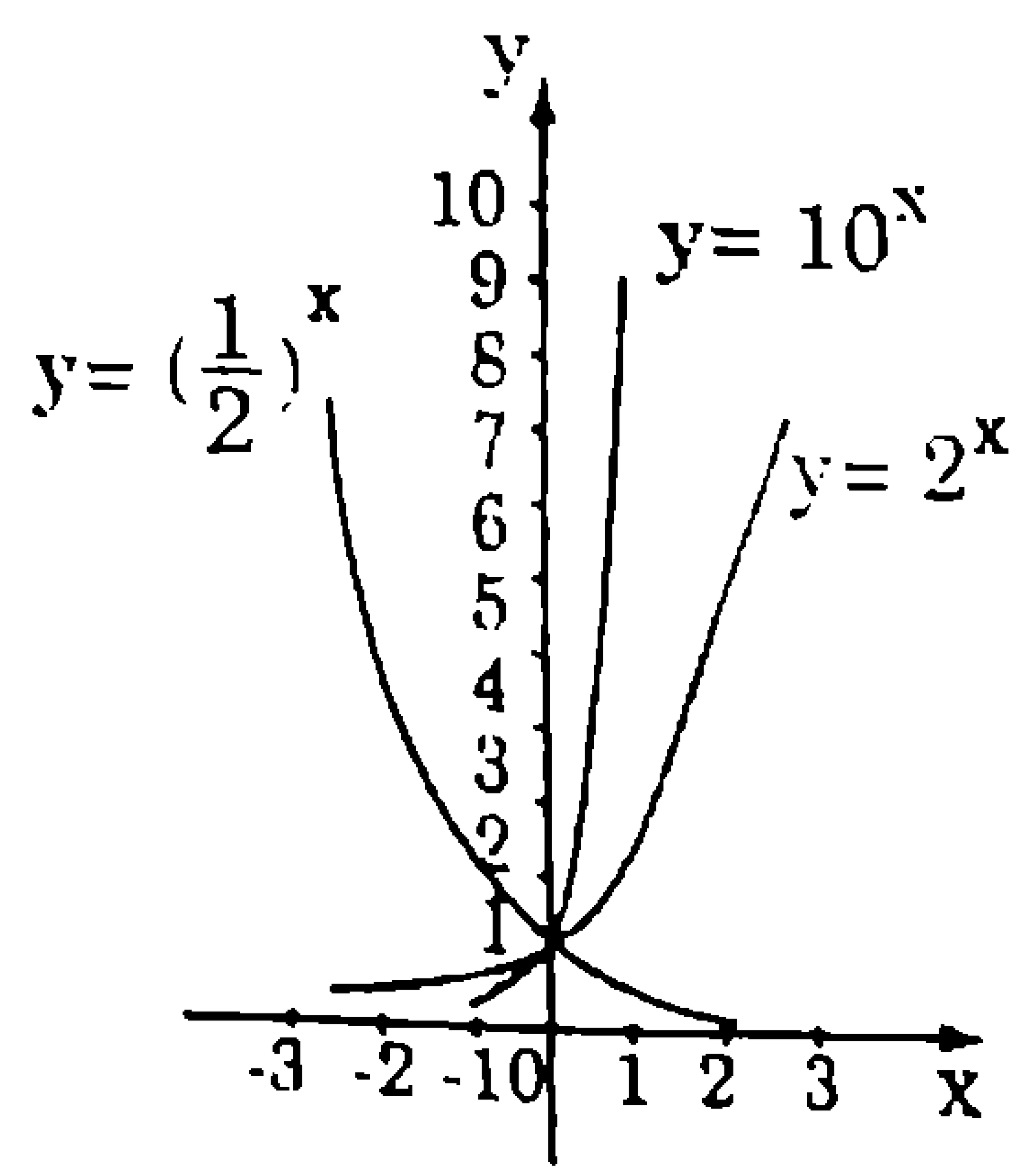
$$b_n = \frac{A_n}{A_o} = (1+5\%)^n \qquad (6\text{-}1)$$

Công thức (6-1) hiển nhiên là ví dụ đặc biệt của hàm số $y = a^n$ khi a = 1,05. Trong toán học hàm số $y = a^n$ gọi là hàm số mũ, trong đó a là đại lượng không đổi, lớn hơn 0 và khác 1.

Hình 6-1 vẽ các dạng hàm số mũ $y = 2^x$, $y = 10^x$ và $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Từ hình 6-1 có thể nhận ra: Khi a > 1, hàm số mũ tăng dần (a càng lớn, y càng tăng nhanh); ngược lại, khi a < 1, hàm số mũ giảm dần.

Chúng ta hãy tính toán các trị số của $b_n = 1,05^n$ trong câu chuyện:



Hình 6-1

khi $x = 1$ thì $b_1 = 1,05$

khi $x = 2$ thì $b_2 = 1,103$

khi $x = 3$ thì $b_3 = 1,158$

....

khi $x = 100$ thì $b_{100} = 131,501$

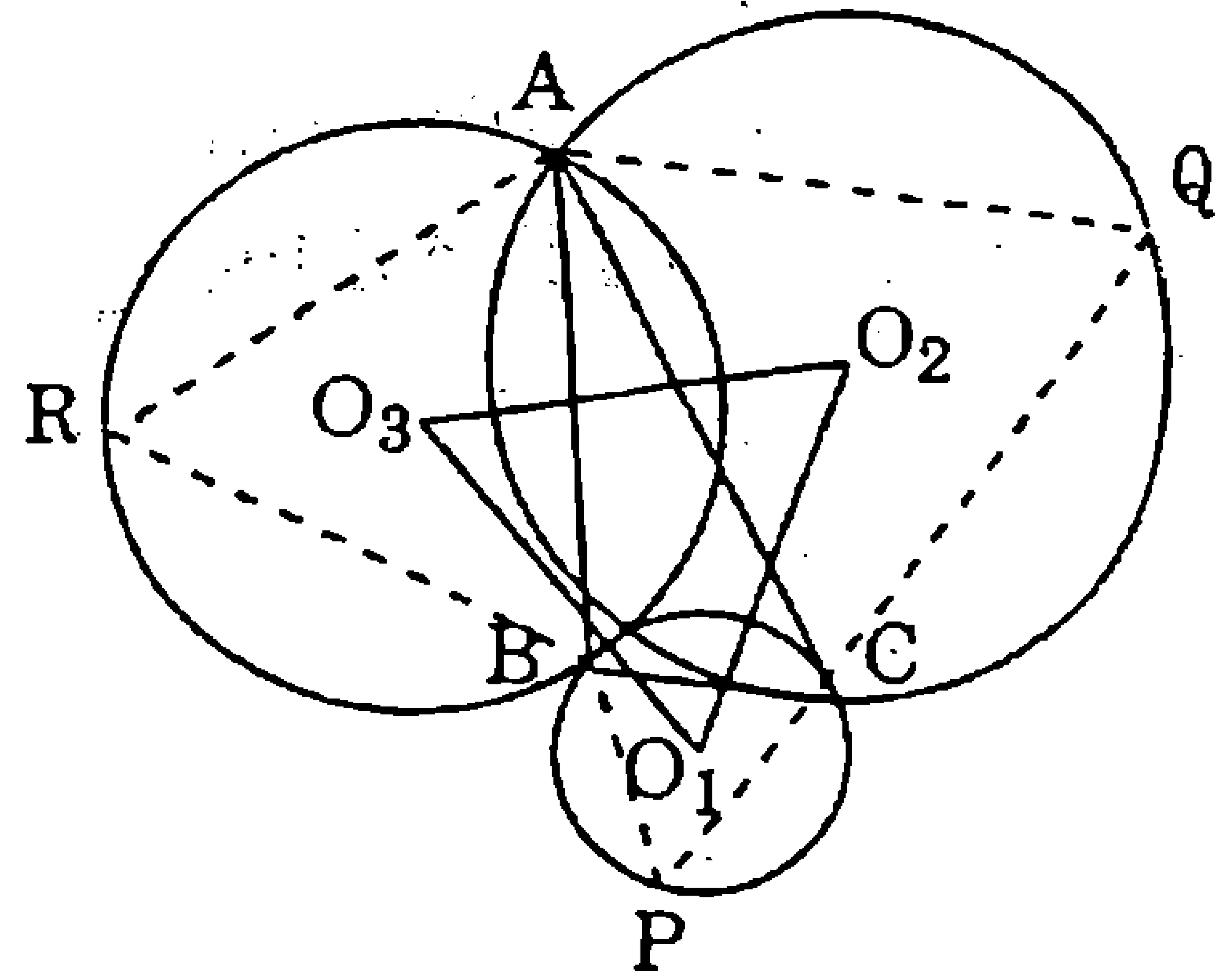
Điều này có nghĩa là, trong câu chuyện ở trên, sau 100 năm đầu, tài sản của B.Franklin đã tăng đến:

$$A_{100} = 1000 \times 1,05^{100} = 131501 \text{ (bảng Anh)}$$

So với B.Franklin viết trong di chúc thì số tiền tính ra còn nhiều hơn 501 bảng Anh! Cuối năm 100 thứ hai, tài sản của ông càng nhiều hơn:

$$A'_{100} = 31501 \times 1,05^{100} = 4142421 \text{ (bảng Anh).}$$

Trên đây là nội dung câu chuyện "Di chúc B.Franklin". Với số tiền ít ỏi, lợi nhuận thấp, nhưng với hiệu ứng thần bí của hàm số mũ, có thể biến đổi làm cho người ta kinh ngạc. Đấy chính là gợi ý cho người đời trong câu chuyện này. Trong lịch sử không hiếm người do không thể ý thức được điều này mà bị thiệt thòi. Napoléon Bonaparte (1769-1821) là một vị tướng và là một vị hoàng đế Pháp tiếng tăm lẫy lừng chính là một trong số đó.



Hình 6-2

Napoléon vẫn được coi là một người có duyên với toán học. Đã có một định lý về hình học mang tên ông: "Nếu từ ba cạnh của một tam giác bất kỳ dựng ba tam giác đều ra phía ngoài, thì tâm của ba vòng tròn ngoại tiếp của chúng cũng sẽ hình thành một tam giác đều" (hình 6-2).

Song, vị tướng hiển hách này lại rơi vào vòng xoáy của hiệu ứng hàm số mũ một cách vô ý thức.

Năm 1797, khi Napoléon thăm một trường tiểu học công lập ở Luxambur, ông đã tặng một bó hoa hồng trị giá 3 đồng Lui vàng và hứa hẹn: "Chỉ cần nước Cộng hoà France tồn tại một ngày thì mỗi năm ông sẽ tặng cho trường một bó hoa hồng giá trị tương đương, để làm tượng trưng cho tình hữu nghị giữa hai nước". Sau này, do chinh chiến liên miên, Napoléon đã quên lời hứa này. Sau gần một thế kỷ, năm 1894, quốc vương Luxambur trịnh trọng nêu lên câu chuyện "Án treo hoa hồng" với nước Cộng hoà Pháp, đòi chính phủ Pháp chọn một trong hai thứ: danh dự của Napoléon hay món nợ 1375596 France. Món tiền lớn này chính là do 3 đồng vàng Lui với lợi nhuận 5% mỗi năm, sinh ra sau 97 năm dưới hiệu ứng của hàm số mũ. Công án lịch sử này khiến nước Pháp rơi vào tình thế rất bí, bởi vì chỉ cần nước Cộng hoà France tiếp tục tồn tại thì án này vẫn có hiệu lực.

Song, hiệu ứng của hàm số mũ lại có nhiều mặt tích cực hơn, nhiều người đã lợi dụng nó có hiệu quả, khiến họ trở thành người chủ của tri thức và của cải!

Công ty Máy tính điện tử Tao nổi danh toàn cầu, do hai người sáng nghiệp trẻ tuổi mở ra năm 1977. Họ đồng tâm hiệp lực "lao tâm khổ tứ" kinh doanh, làm cho lượng tiêu thụ tăng dần bằng tỷ lệ tăng trưởng trung bình hàng năm 171%. Trong thời gian vẻn vẹn 6 năm, mức tiêu thụ của họ từ giá trị 2,50 triệu USD, tăng đến gần 1 tỷ USD:

$$A = 2,5 \times 10^6 \times (1 + 1,71)^6 = 9,9 \times 10^8 \text{ (USD)}$$

Công ty này đã từ một nhà xe không ai để ý đến, nhảy một bước trở thành một công ty lớn nổi tiếng thế giới. Hai chàng trai trẻ vì thế đã trở thành ông chủ của tài sản khổng lồ!

Hàm số mũ không chỉ ứng dụng rất rộng rãi trong toán học, vật lý, thiên văn,... mà còn có những ứng dụng to lớn ở các môn khoa học tự nhiên khác, thậm chí trong cả khoa học xã hội! Các hiện tượng tự nhiên và hiện tượng xã hội biến đổi bằng quy luật hàm số mũ có một đặc tính cực kỳ quan trọng, tức là lượng biến đổi ΔA của đại lượng A, luôn tỷ lệ thuận với bản thân đại lượng A và thời gian biến đổi Δt của nó:

$$\Delta A \text{ tỷ lệ thuận với } A\Delta t. \qquad (6\text{-}2)$$

Nếu gọi

$$A = f(t) = a^t \qquad (6\text{-}3)$$

thì: $$\Delta A = a^{t+\Delta t} - a^t = a^t(a^{\Delta t} - 1) = A\Delta t\left(\frac{a^{\Delta t} - 1}{\Delta t}\right) \qquad (6\text{-}4)$$

Có thể chứng minh được rằng, khi thời gian biến đổi rất ngắn thì đại lượng trong ngoặc của vế phải (6-4) tiến tới giới hạn k, từ đó:

$$\Delta A = kA\Delta t \qquad (6\text{-}5)$$

Các nhà toán học cũng đã chứng minh được rằng, nếu lượng biến đổi của đại lượng A tỷ lệ thuận với chính bản thân nó và thời gian biến đổi (hệ số tỷ lệ là k) thì:

$$A = A_0 e^{kt} \qquad (6\text{-}6)$$

trong đó A_0 - trị số ban đầu ($t = 0$) của đại lượng biến đổi A;

$e = 2{,}718$ ... một đại lượng không đổi (trong toán học e quan trọng như tỷ số đường tròn π).

7. PHƯƠNG PHÁP TOÁN HỌC QUAN TRỌNG NHẤT TRONG LỊCH SỬ

Ngày nay, nhiều học sinh trung học có máy tính bỏ túi. Với công cụ tính toán này, việc thực hiện phép tính nhân và phép tính cộng hầu như đều thuận tiện và dễ dàng như nhau, mà bốn trăm năm trước đây người ta không thể tưởng tượng nổi.

Thế kỷ XVI ở châu Âu, chủ nghĩa tư bản nhanh chóng phát triển, khoa học và kỹ thuật cũng thay đổi theo. Thiên văn, hàng hải, đo vẽ, đóng thuyền,... không ngừng nêu ra những bài toán thực tế. Trong hàng loạt bài toán đó có bài toán tính toán quỹ đạo các thiên thể, đo vẽ bề mặt Trái Đất, xác định vị trí của tàu thuyền, thiết kế kết cấu tàu thuyền,... Những bài toán đó gặp rất nhiều số liệu và muôn hình nhiều vẻ. Vô số phép toán của bốn phép tính số học, luỹ thừa, khai căn,... đã làm hao tổn sức lực và thời gian của các nhà khoa học. Nhưng điều nan giải nhất là việc giải quyết các vấn đề mà thực tế nêu ra không thể đợi được thời gian dài như vậy! Chẳng hạn, tàu thuyền đang đi trên biển, không thể đợi để xác định xong kinh - vĩ độ rồi mới giương buồm xuất phát được!

Cuối cùng các nhà toán học đã tìm được cách khắc phục là lập ra các loại bảng biểu: bình phương, lập phương, khai căn, diện tích,... Các bảng biểu này đã một thời là giải pháp cứu cánh. Tuy vậy, lại xuất hiện các yêu cầu mới.

Trong làn sóng lập các bảng biểu, có người đã sử dụng công thức:

$$ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 \qquad (7\text{-}1)$$

nên chỉ phải dùng một loại "bảng bình phương một phần tư" là có thể tìm ra tích của hai số. Phương pháp là dùng một phần tư bình phương tổng hai số trừ đi một phần tư bình phương hiệu của chúng, như (7-1). Bạn đọc không khó phát hiện ra rằng, loại bảng này còn có thể dùng để tìm bình phương hoặc căn bậc hai. Nếu dùng kết hợp với bảng số nghịch đảo thì còn có thể giản hoá khi giải toán có phép chia.

Song, hạn chế của "bảng bình phương một phần tư" rất rõ rệt. Giống như "CD chúc B.Franklin" và "Án treo hoa hồng" trong các câu chuyện ở mục 6, không có cách gì dùng bảng bình phương một phần tư nhanh chóng được.

Nhân loại đã sử dụng quá nhiều các bảng biểu trong điều kiện như vậy suốt hơn nửa thế kỷ. Mãi đến năm 1544, nhà toán học Michael Stifel (1486 - 1567) người Đức, giáo sư trường Đại học Cnispao nổi tiếng đã có một bước tiến quan trọng về mặt giản hoá tính toán số lớn. Trong cuốn "Thuật toán phổ thông", M. Stifel tuyên bố đã phát hiện một tính chất kỳ diệu khi so sánh dãy cấp số nhân và dãy cấp số cộng (bảng 7-1).

Bảng 7-1

Dãy cấp số nhân	Dãy cấp số cộng
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17

④ ⑧ $4 + 8 = 12$

M.Stifel gọi các số của dãy cấp số nhân là "nguyên số" và gọi các số tương ứng của dãy cấp số cộng là "người đại diện" (sau này gọi là "số mũ"). Ông phát hiện ra rằng, tích của hai số hạng trong dãy cấp số nhân bằng một số hạng trong dãy cấp số nhân mà số đó tương ứng với số bằng tổng của hai số tương ứng với hai số hạng của tích vừa nêu trong dãy cấp số cộng. Tương tự như vậy, bên dãy cấp số nhân là thương thì bên dãy cấp số cộng là hiệu. Từ đó, ông rút ra kết luận: "Có thể thông qua so sánh như trên mà giản hoá giải toán nhân, chia thành giải toán cộng, trừ".

Có thể nói rằng, M.Stifel đã đi gần đến đích của phát hiện trọng đại. Bởi vì, "người đại diện" y mà ông nói ở trên, thực tế là logarit cơ số 2 của x:

$$y = \log_2 x \tag{7-2}$$

Tính chất kỳ diệu mà M.Stifel phát hiện ra có thể viết thành:

$$\left.\begin{aligned} \log_2(M.N) &= \log_2 M + \log_2 N \\ \log_2\left(\frac{M}{N}\right) &= \log_2 M - \log_2 N \end{aligned}\right\} \tag{7-3}$$

Hai công thức trong (7-3) rất quen thuộc với học sinh trung học ngày nay.

Tuy vậy, M.Stifel đã nghi ngờ điều vĩ đại mà chính ông đã phát hiện ra do vậy cho đến lúc "nhắm mắt xuôi tay" ông vẫn chưa đi được đến đích!

J.Neper

Trong thời gian đó, ở Edinburgh của Scotland xuất hiện một nhân vật kiệt xuất đã phát minh ra logarit, đó là John Neper (1550 - 4/4/1617).

J.Neper xuất thân trong một gia đình quý tộc, thiên tư thông minh, tài năng mẫn tiệp, lại được sự rèn đúc tốt từ nhỏ của gia đình. Năm 13 tuổi ông vào học ở một học viện của Trường Đại học St.Antros. Năm 16 tuổi ông học ở nước ngoài. Năm 1571, J.Neper ôm chí lớn về nước. Đầu tiên ông nghiên cứu thiên văn, máy móc và toán học. Trong thời gian này, ông gặp quá nhiều những tính toán phức tạp mà chưa có cách gì khắc phục. Năm 1590, J.Neper sửa đổi cách làm việc, chuyên tâm vào việc giản hoá tính toán. Ông suy nghĩ độc đáo và cuối cùng, theo vết chân của M.Stifel, ông đã bước đến đích, mở ra thời đại mới.

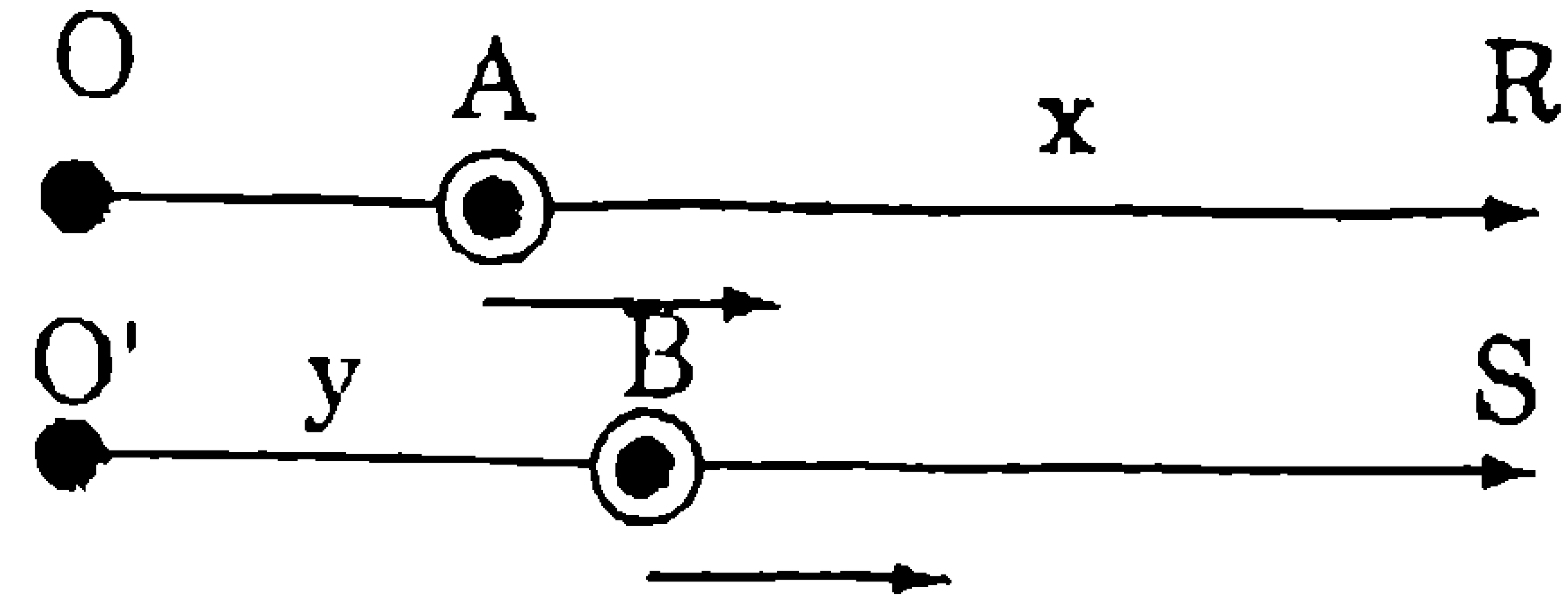
J.Neper đã cấy dày đặc rất nhiều trị số trung gian vào bảng phân tán của M.Stifel, hệt như các sợi ngang luồn qua các sợi dọc dệt nên tấm vải!

Năm 1594, J.Neper bắt đầu tập trung biên soạn bảng logarit để dùng được trong thực tế. Trải qua bảy nghìn ba trăm ngày đêm, một cuốn sách mang tên "Mô tả các bảng logarit" ra đời năm 1614, dày đến 200 trang. Trong cuốn sách này ông đã trình bày các tính chất của logarit, mô tả các bảng logarit, thuyết minh các quy tắc sử dụng, đưa ra các bảng logarit và những ví dụ áp dụng logarit. Ông gọi các số hạng của cấp số cộng là logarit của các số hạng tương ứng của cấp số nhân.

P.S de Laplace

Như vậy, J.Neper đã dùng 20 năm trong cuộc đời để giảm nhẹ tính toán cho nhân loại, tức là đã kéo dài tuổi thọ cho bao người.

Nhà toán học lớn Pierre-Simon de Laplace (23/3/1749 - 5/3/1827) người Pháp đã nói rất đúng: "Nếu cuộc đời của một người



Hình 7-1

được đánh giá bằng sự làm việc của cả đời người ấy thì sự phát minh ra logarit đã kéo dài tuổi thọ của toàn nhân loại" và ông cũng đã xác nhận rằng, việc phát minh ra logarit đã "giảm lao động cho các nhà thiên văn được một nửa cuộc đời".

Điều không may là việc phát minh của J.Neper đã kéo dài tuổi thọ cho người khác nhưng lại không thể làm cho cuộc đời của chính mình kéo dài được. Đầu năm thứ ba, sau khi công bố trước tác của mình, nhà toán học kiệt xuất J.Neper, mà người đời sau mãi mãi nhớ tới này, cuối cùng vì làm việc kiệt sức đã từ giã cõi đời!

Phát minh logarit của J.Neper có tính thần kỳ. Ở châu Âu thời đó đại đa số dân vẫn vô cùng lạc hậu, thậm chí ngay cả khái niệm về số mũ cũng chưa được xác lập. Trong điều kiện như vậy mà J.Neper phát minh ra được logarit thì không thể không nói là kỳ tích.

Logarit của J.Neper là một ví dụ lý thú về vật lý.

Hai phần tử A và B có cùng tốc độ v ban đầu. Phần tử A chuyển động với tốc độ thay đổi trên đoạn OR, tỷ lệ thuận với khoảng cách từ nó đến R. Phần tử B chuyển động thẳng với tốc độ đều (hình 7-1). Đặt AR = x, O'B = y. Hãy tìm quan hệ giữa x và y?

J.Neper sau khi phân tích kỹ đã phát hiện ra rằng: Tốc độ cuối tức thời của phần tử A là một dãy cấp số nhân lùi vô hạn:

$$v, v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1}, v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}, v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3}, \ldots, v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t}, \ldots$$

Từ đó, đại lượng x khi biến đổi cũng có thể xem như một dãy cấp số nhân lùi vô hạn; còn y thì khi biến đổi hiển nhiên có thể xem là một dãy cấp số cộng tăng vô hạn:

$$0, v, 2v, 3v, \ldots, tv, \ldots$$

Như vậy, giữa đại lượng biến đổi y và đại lượng biến đổi x đã lập nên một quan hệ hàm số J.Neper gọi y là logarit của x và viết

$$y = \log_{\frac{1}{e}} x = \ln\frac{1}{x} \qquad (7\text{-}4)$$

Ký hiệu ln biểu thị "logarit tự nhiên" (thuật ngữ do nhà toán học Mercator người Đức đưa ra, còn gọi là logarit hypebolic), cơ số của logarit là e đã nói ở mục 6.

Trong toán học, nói chung công thức của hàm số logarit là:

$$y = \log_a x \qquad (7\text{-}5)$$

Chuyển đổi (7-5) sang số mũ, ta có:

$$x = a^y \qquad (7\text{-}6)$$

Trong (7-6) nếu coi đại lượng biến đổi x là hàm số của đại lượng biến đổi y và đổi việc dùng ký hiệu hàm số và đại lượng tự biến thường dùng, ta có:

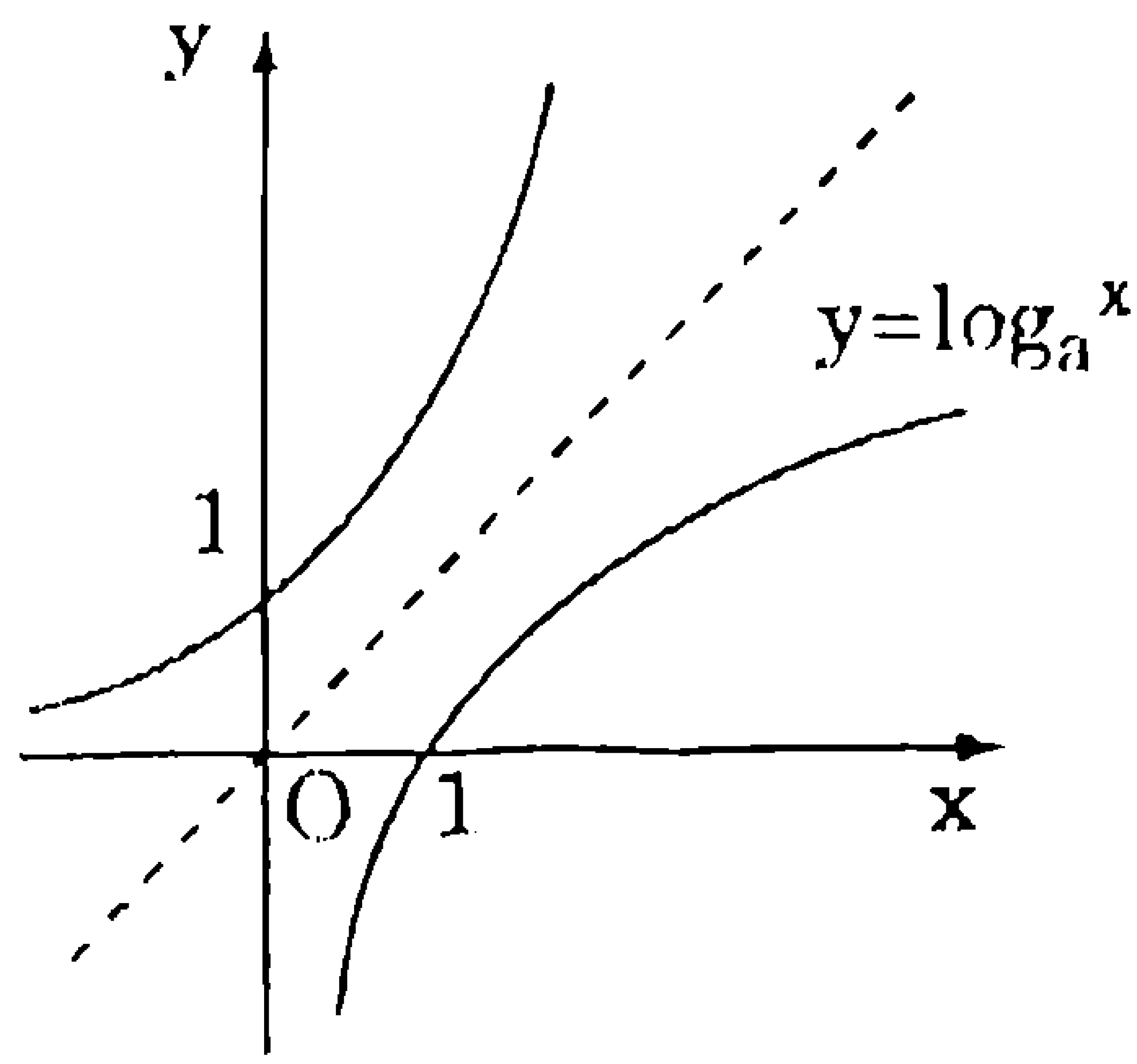
$$y = a^x \qquad (7\text{-}7)$$

Hai hàm số y = f(x) và y = g(x) được gọi là hàm số ngược của nhau nếu:

$$y = f(x) \leftrightarrow x = g(y)$$

Như vậy, hàm số logarit là hàm số ngược của hàm số mũ.

Đồ thị của hai hàm số ngược nhau này nếu biểu diễn trên một hệ tọa độ thì đường phân giác của các góc phần tư I và III là trục đối xứng của (hình 7-2).



Hình 7-2

Logarit là một trong những phát minh quan trọng nhất của loài người ở thế kỷ XVII. Trong lịch sử toán học, logarit của J.Neper, hình học giải tích của René Descartes (31/3/1596 - 11/1/1650) (người Pháp) và vi - tích phân của Isaac Newton (25/12/1642 - 20/3/1727) và G.W.von Leibniz là ba phát minh cùng nổi tiếng, được coi là "phương pháp toán học quan trọng nhất trong lịch sử"!

I.Newton

R.Descartes

8. CÔNG LAO MÃI MÃI KHÔNG PHAI MỜ

Thời thế tạo nên anh hùng hay anh hùng tạo nên thời thế? Đây là một vấn đề rất đáng tranh luận. Trả lời của các nhà nghiên cứu lịch sử toán học là: Bất cứ thành tựu nào của toán học, ngoài hoàn cảnh tốt của thời đại, tài năng của cá nhân ra, thường cần tới sự nỗ lực của một lớp người, thậm chí mấy lớp người.

Tư tưởng "số mũ" của M.Stife trên thực tế đã có từ hai nghìn hai trăm năm trước. Trong cuốn "Phép tính cát" nổi tiếng của nhà toán học Archimèdes (287-212 trước Công nguyên) người Hy Lạp cổ đại đã đưa ra hai dãy số:

$$1, 10, 10^2, 10^3, 10^4 \ldots$$

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Archimedes đã phát hiện ra quan hệ giữa số mũ và cơ số. Song, do tư tưởng thiên tài của ông vượt hẳn thời đại đương thời nên phát hiện của ông chưa có người hậu thế tiếp nhận.

Archimedes

Trong câu chuyện ở mục 7 chúng ta đã nói về việc phát minh ra logarit của J.Neper. Cũng trong thời gian đó, bên lục địa châu Âu có một người Thụy Sĩ sản xuất nhạc cụ nhưng thông minh tuyệt đỉnh, đó là Jobst Burgi

(28/2/1552 - 31/1/1632). Ông cũng chính là người trợ thủ đắc lực của nhà thiên văn học nổi tiếng Johnn Kepler (27/12/1571 - 15/11/1630) người Đức. Do nhu cầu của tính toán thiên văn, vào năm 1620 (tức là 6 năm sau khi J.Neper công bố cuốn "Mô tả các bảng logarit"), J.Burgi đã lập được bảng logarit hoàn toàn độc lập với J.Neper.

Phát minh của J.Neper là không gì sánh nổi. Thành quả phi phàm của ông đã kinh động nhà toán học, thiên văn học Henry Briggs (1561-1631) sống ở London, giáo sư trường Đại học Oxford. H.Briggs rất say sưa với lý luận logarit lạ lùng và kỳ diệu của J.Neper. Ông khát khao gặp được nhà sáng tạo này.

Đầu mùa hè năm 1616, H.Briggs gửi thư cho J.Neper, hy vọng có dịp được tới thăm J.Neper. J.Neper lâu nay cũng ngưỡng mộ đại danh H. Briggs nên lập tức viết thư trả lời, vui vẻ nhận lời và định ngày gặp nhau. Không lâu sau đó, H.Briggs lên đường tới Edinburgh.

Đường từ London đến Edinburgh xa nghìn dặm mà phương tiện giao thông nhanh nhất thời đó chỉ có xe ngựa. Tuy rằng, H.Briggs đã đi cả ngày lẫn đêm cũng phải mất vài ngày. Hai nhà khoa học đã từ lâu lòng dạ, tâm trí hướng về nhau. Họ đều rất mong đợi cuộc gặp đầu tiên này.

Vào thời điểm quan trọng này, giữa đường xe ngựa của H.Briggs bị hỏng. H.Briggs trong lòng như lửa cháy, lại không biết làm cách nào để thông tin cho J.Neper biết. Sau đó sửa được xe ngựa, mặc dù đã tăng tốc độ nhưng vẫn không thể đến Edinburgh đúng hẹn được.

Lại nói về J.Neper. Đến ngày hẹn, ông bồn chồn đứng ngồi không yên, mong chóng đến giờ hẹn để được gặp H.Briggs. Quá giờ hẹn, không thấy H.Briggs đến, J.Neper lo lắng, sốt ruột. Ông già tuổi gần "cổ lai hy" đã chờ hơn 1 ngày, bỗng có tiếng chuông reo, J.Neper vội chạy ra cửa,...

Khi H.Briggs cát bụi dặm trường xuất hiện, hai nhà khoa học bắt tay nhau thân thiết như những người bạn cũ lâu ngày chưa gặp nhau, môi mấp máy, hồi lâu mới nói nên lời.

H.Briggs đã nói trước: "Lần này tôi vui với chuyến đi mục đích duy nhất là được gặp trực tiếp ông, nhà thiên tài đã phát minh ra phương pháp tuyệt diệu đối với thiên văn học".

Lần gặp gỡ này khiến hai nhà khoa học kết thành tình bạn "tâm đầu ý hợp". Căn cứ vào kinh nghiệm giảng dạy ở trường Đại học Oxford, H.Briggs đã kiến nghị J.Neper đổi cơ số logarit thành 10, chủ trương lấy:

$$\log_{10} 1 = \lg 1 = 0$$

$$\log_{10} 10 = \lg 10 = 1$$

Logarit của một số N có thể chia thành hai phần: phần nguyên (phần đặc tính) và phần thập phân (phần định trị), tức là:

$$\text{Lg } N = \alpha,\text{xxxx}$$

thì $\begin{cases} \alpha = [\lg N] \\ 0,\text{xxxx} = \lg N - [\lg N] \end{cases}$

J.Neper rất tán đồng kiến nghị của H.Briggs, cho rằng loại logarit cơ số 10 này càng thực dụng hơn đối với tính toán thông thường.

Cứ như vậy, J.Neper tập trung toàn bộ tinh lực vào việc biên soạn bảng logarit mới cho đến khi qua đời.

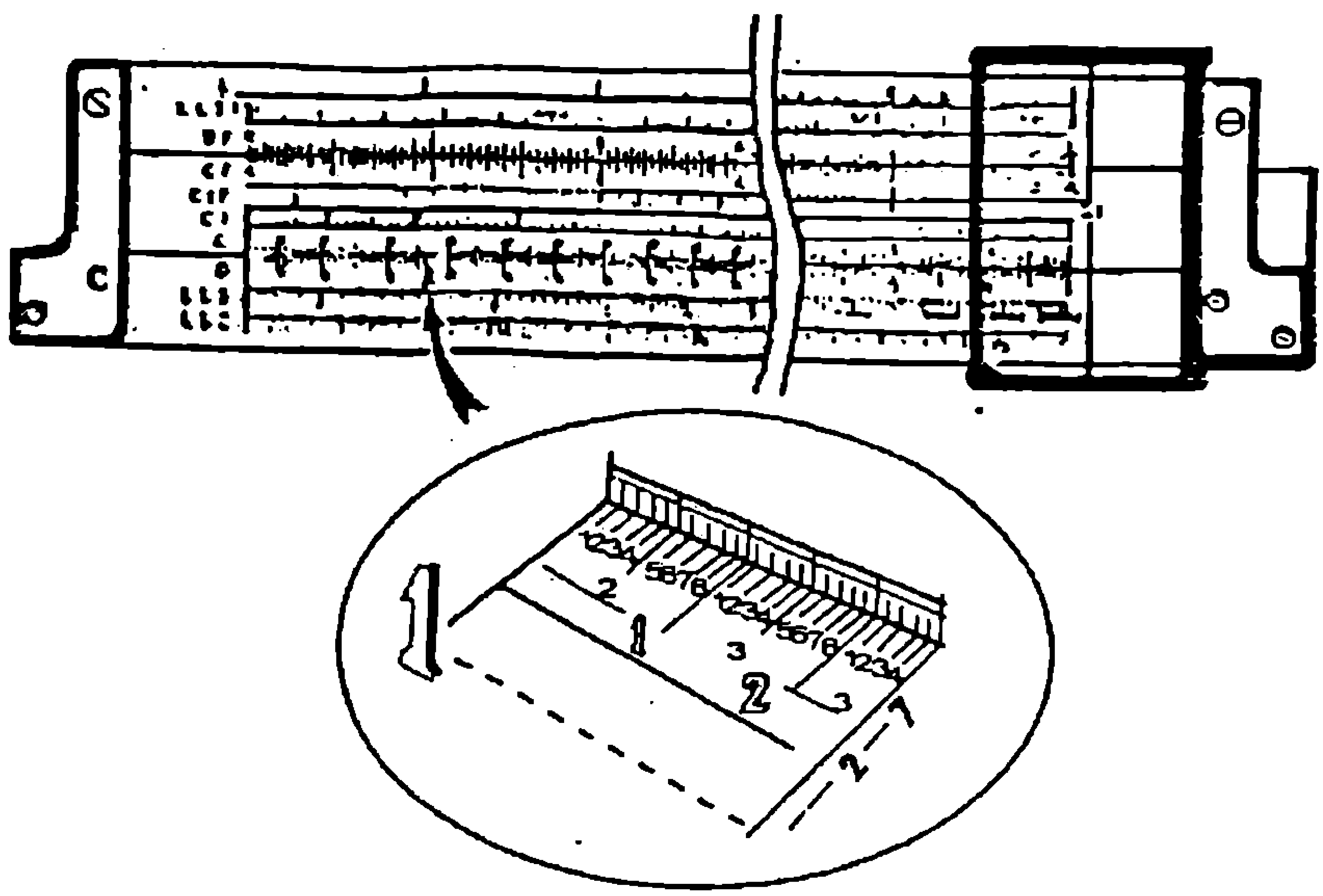
Sự nghiệp chưa hoàn thành của J.Neper đã được H.Briggs kế thừa. Sau 8 năm gian khổ, năm 1824, bảng logarit thường dùng đầu tiên ra mắt. Song, bảng logarit của H.Briggs trên thực tế là không liên tục, chỉ có logarit các số từ 1 đến 20000 và từ 9000 đến 100000. Phần các số bỏ trống của bảng logarit của H.Briggs đã được nhà toán học Flack người Hà Lan lấp đầy trong 4 năm sau đó.

Cùng với việc mở rộng sử dụng logarit, các loại bảng logarit có độ chính xác cao hơn, kế tiếp nhau xuất hiện, mà kỷ lục là bảng logarit của Yastas, gồm 260 chữ số thập phân.

Theo sự tăng chữ số thập phân trong bảng logarit, độ dày các bảng cũng tăng theo: bảng 4 chữ số thập phân chỉ cần 3 trang, bảng 5 chữ số thập phân cần 30 trang, còn bảng 6 chữ số thập phân đã phải 182 trang,... Đứng trước tình trạng chạy đua về chữ số thập phân kỷ lục, có người đã nghĩ theo hướng khác. Thực tế có cần đến các bảng logarit có độ chính xác quá cao (nhiều chữ số thập phân) như vậy không? Bởi vì, khi độ chính xác trong đo đạc chỉ đạt đến một mức độ nào đó thì dùng các bảng logarit có độ chính xác quá cao sẽ chỉ là lãng phí thời gian và sức lực chứ không nâng cao được độ chính xác trong tính toán.

Thế là người ta lại thi nhau làm theo hướng ngược lại: soạn ra các bảng logarit có chữ số thập phân vừa đủ theo yêu cầu thực tế. Hiện nay, sách giáo khoa của toàn thế giới hầu như đều dùng bảng logarit có 4 chữ số thập phân. Sử dụng loại bảng logarit này chắc hẳn bạn đọc đã rất quen thuộc.

Một kết quả khác của suy nghĩ ngược lại về bảng logarit nhiều chữ số thập phân là sự ra đời của một công cụ tính toán nhanh hơn. Hình 8-1 là một mẫu thước tính thường gặp, số đọc trên thước tiêu chia làm 3 cấp, vì thế có thể đọc được 3 chữ số hữu hiệu. Đối với các phép tính mà độ chính xác không đòi hỏi quá cao, thước tính là vô cùng tiện lợi.



Hình 8-1

Dùng thước tính có thể thực hiện được nhiều tính toán khác nhau. Dùng thước tính logarit thông thường có thể nhân chia, luỹ thừa, khai căn, thực hiện các phép tính lượng giác. Cũng có những thước tính có thang để giải các bài toán đặc biệt, chẳng hạn thước tính dùng trên máy bay thì ở thang 17 có thể tính đường bay, thời gian và tốc độ bay, theo chỉ số ở phong vũ biểu, chuyển kích thước độ dài và tốc độ, ...

Tiền thân của thước tính là thẻ tính J.Neper, nó được J.Neper phát minh vào năm 1617. Đó là vết khắc các chữ số lên một số mảnh hình chữ nhật, khớp lại để tiến hành tính toán nhân chia, luỹ thừa và khai căn.

Bảng logarit và thước tính có cùng nguồn gốc, nhưng tốt xấu có khác nhau: tốc độ chậm mà độ chính xác cao, độ chính xác thấp nhưng tốc độ tính toán nhanh. Có thể tạo ra được dụng cụ vừa tính toán nhanh vừa có độ chính xác cao không? Đã mấy thế kỷ qua các nhà khoa học đã nỗ lực tìm tòi theo hướng này.

B.Pascal

Năm 1642, nhà toán học 19 tuổi Blais Pascal (19/6/1623 - 19/8/1662) người Pháp đã phát minh ra máy tính số học đầu tiên với tên gọi là máy tính Pascalin, thực hiện được các phép tính cộng, trừ nên còn gọi là máy tính tổng.

J.von Neumann

Năm 1667, nhà toán học nổi tiếng G.W.von Leibniz đã phát minh ra máy tính có thể thực hiện được các phép tính số học, đó là chiếc máy tính số học tự động.

Năm 1847, công trình sư Osnier người Nga đã nghiên cứu chế tạo thành công một máy tính quay tay có công năng hoàn thiện đầu tiên trên thế giới.

Năm 1890 chiếc máy tính chạy điện đầu tiên được nhà thống kê H.Hollerith (1860 - 1929) người Mỹ đưa ra để phục vụ điều tra dân số.

Tuyệt đại đa số các máy tính điện tử hiện nay là máy tính kiểu Von Neumann. Máy tính kiểu này dựa trên một số nguyên lý do nhà toán học John von Neumann (3/12/1903 - 8/2/1957) người Mỹ gốc Hunggari đề xuất năm 1945.

Ngày nay, máy tính điện tử đã phát triển qua mấy thế hệ, bộ mặt của nó đã khác rất xa cách nay nửa thế kỷ. Các kiểu máy tính điện tử đã từ lâu thay thế thước tính và bảng logarit. Song phát minh ra bảng logarit và công lao của các nhà khoa học trong lịch sử không bao giờ bị lãng quên.

9. ĐÂY KHÔNG PHẢI LÀ LỜI ĐE DỌA

Sự uy hiếp của bệnh ung thư đối với loài người đã làm cho nhân loại ý thức được rằng, để đối phó với căn bệnh nguy hiểm này, cả thế giới phải hợp sức lại, không chỉ trong từng quốc gia.

Năm 1972, R.M.Nixon tái cử tổng thống Mỹ, đã kiến nghị hai nước Xô - Mỹ hợp tác tấn công bệnh ung thư. Kiến nghị được tiếp nhận ngay, kết quả trực tiếp nhất là hai bên tặng cho nhau các kết quả nghiên cứu: phía Mỹ đưa tặng 23 loại chất độc gây bệnh ung thư, phía Liên Xô đưa tặng tiêu bản tế bào ung thư của 6 người bệnh.

Tháng 1/1973, Trung tâm Nghiên cứu bệnh ung thư quốc gia Mỹ quyết định phân các tiêu bản tế bào ung thư của Liên Xô cho mấy nhà khoa học nghiên cứu. Một phần trong đó được đưa đến bác sĩ Nielinsuis. Ông đã dùng kính hiển vi kiểm tra toàn bộ tiêu bản. Ông kinh ngạc khi phát hiện ra đôi thứ 23 của nhiễm sắc thể[1] những tế bào này đều là nhiễm sắc thể X (giới tính nữ).

Bác sĩ Nielinsuis đã suy nghĩ, so sánh mãi mà không hiểu, chuyển sang cầu cứu nhà sinh vật học, giáo sư Pitoson. Giáo sư đã tiến hành kiểm tra nghiêm túc đối với chất nuôi cấy, cuối cùng đã có kết luận khiến người ta kinh hoàng: Tất cả các chất nuôi cấy đều có một loại dung môi đặc biệt trong suốt một màu, mà loại dung môi này hầu như chỉ có ở người da đen.

---

[1] Nhiễm sắc thể là phần nhân của tế bào, có vai trò chủ đạo về mặt di truyền.

Bác sĩ Nielinsuis quyết tâm làm rõ tận "chân tơ kẽ tóc" điều này. Qua mấy lần phân tích kỹ càng, cuối cùng ông đã tìm ra tất cả 6 tiêu bản mà phía Liên Xô đưa tặng đều là tế bào của người Mỹ da đen Lacks đã chết hơn 20 năm về trước.

Lacks chết tháng 10/1951 vì bệnh ung thư cổ tử cung hiếm thấy. Loại tế bào ung thư đặc biệt này sẵn có sức sinh sôi nảy nở và sức sống rất mạnh. Từ khi phát hiện bệnh đến lúc Lacks chết chưa đầy 8 tháng. Điều này đối với ung thư cổ tử cung thông thường là "có một không hai". Khi Lacks chết, tình cảnh rất thê thảm: cả khoang bụng hầu như bị tế bào ung thư chiếm lĩnh. Các nhà khoa học đã lấy loại tế bào ung thư này để nuôi cấy và phát hiện ra là những tế bào ung thư đó sinh trưởng một cách điên cuồng theo dạng hàm số mũ:

$$y = A_0 2^x \tag{9-1}$$

trong đó: A_0 - số lượng tế bào ban đầu;

x - thời gian.

Cứ qua 24 giờ thì những tế bào này lại tăng gấp đôi. Loại tế bào ung thư này được đặt tên là "Haila" và được khống chế nghiêm ngặt ở trong phòng thí nghiệm.

Tế bào "Haila" trong thời gian không đầy 1 tháng đã tăng thêm gấp vài nghìn vạn lần. Điều này khiến hiện tượng thần bí mà trước đây người ta cho rằng, tế bào khoẻ mạnh "tự phát" chuyển biến thành tế bào ung thư, có được sự giải thích mới. Hoá ra cái gọi là "tự phát" chuyển biến, chẳng qua là tế bào "Haila" tiêu diệt và chiếm lĩnh tất cả vật nuôi cấy.

Song sự việc đã qua hơn 20 năm, tế bào "Haila" chẳng những không bị chết mà còn lọt ra nước ngoài khiến người ta khó hiểu và nó đã xuất hiện ở Mockva. Thế là bác sĩ

Nielinsuis đã viết bài, gõ tiếng chuông cảnh tỉnh với toàn thế giới: “Nếu để mặc tế bào "Haila" sinh trưởng trong điều kiện thích hợp nhất, không hề bị kìm hãm lại thì đến nay chúng rất có thể đã chiếm lĩnh cả thế giới!".

Chúng ta đang nói chuyện giật gân sao? Không! Đây là kết luận khoa học!

Chúng tôi nghĩ rằng bạn đọc chắc còn nhớ câu chuyện nhà vua Shehan nước Ấn Độ cổ đại định trọng thưởng cho người phát minh ra cờ Ấn Độ (cờ châu Âu) số thóc bằng cách bỏ vào ô thứ nhất 1 hạt, ô sau gấp đôi ô trước, đến đủ 64 ô cờ. Ở cuốn *Những câu chuyện lý thú về logic* người ta đã tính ra số thóc là $1{,}845 \times 10^{19}$ hạt.

Số hạt này nếu là thóc thì cả thế giới phải sản xuất 630 năm như sản lượng năm 1999, nếu tính ra hạt lúa mì thì phải sản xuất gần hai nghìn năm!

Song sự sinh sôi nảy nở của tế bào "Haila", muốn đạt tới số lượng này chỉ cần thời gian hơn 2 tháng một chút. Nếu để nó sinh trưởng bình thường thì theo lý thuyết, chỉ sau 1 năm sẽ đạt tới:

$$y = A_0 \times 2^{365}$$

Ta thử tính xem số lượng này là bao nhiêu? Ta có:

$$\begin{aligned} \lg y &= \lg A_0 + \lg 2^{365} \\ &= \lg A_0 + 365 \times \lg 2 \\ &= \lg A_0 + 365 \times 0{,}3010 \end{aligned}$$

Vậy:

$$\lg\left(\frac{y}{A_0}\right) = 109{,}865$$

Do đó:

$$y = 7{,}328 \times 10^{100} A_0$$

Với số lượng nhiều như vậy, thì sau 1 năm, chẳng những "Haila" chiếm cả Trái Đất mà là chiếm cả vũ trụ cũng không ngoa!

May mà loài người đã biết cách khống chế hữu hiệu đối với sinh vật: Ngăn chặn một cách đúng lúc sự sinh sôi nảy nở kiểu hàm số mũ của một số sinh vật có hại; đồng thời theo đòi hỏi của loài người, cứu vãn các động vật, thực vật đang kề bên sự tuyệt diệt.

Điều có ý châm biếm là: Từ rất sớm loài người đã chú ý tới việc khống chế sinh vật, lại muộn mằn mới chú ý tới việc khống chế bản thân con người, do vậy nhân khẩu thế giới vẫn đang tăng trưởng theo đường cong của hàm số mũ đáng sợ.

Đầu Công nguyên dân số trên Trái Đất chưa đầy 250 triệu người. Đến năm 1650 nhân khẩu thế giới cũng mới đạt 500 triệu người. Chúng ta thử tính tỷ suất tăng trưởng p của nhân khẩu thế giới trong thời gian 1650 năm đó:

$$5 \times 10^8 = 2{,}5 \times 10^8(1 + p)^{1650}$$

$$2 = (1 + p)^{1650}$$

$$\lg 2 = 1650 \lg(1 + p)$$

$$\lg(1 + p) = 0{,}3010 : 1650 = 0{,}0001824$$

$$1 + p = 1{,}00042$$

$$p = 0{,}042\%$$

Như vậy, trong khoảng 1650 năm sau Công nguyên nhân khẩu thế giới chỉ tăng trưởng hơn 4 phần vạn. Song từ năm 1650 đến năm 1825 chỉ có 175 năm mà dân số thế giới đã tăng gấp đôi. Nếu tính tỷ lệ tăng trưởng trong thời gian này thì ta được $p = 0{,}46\%$, tức là cao hơn thời gian trước hơn 10 lần.

Nếu lập bảng dân số theo tỷ người, ta được bảng 9-1.

Bảng 9-1

Thời gian	Đầu CN	Năm 1650	Năm 1925	Năm 1960	Năm 1975	Năm 1987	Năm 1999	Năm 2011
Dân số (tỷ người)	0,25	1	2	3	4	5	6	7
Khoảng cách (năm)	1650	175	35	15	12	12	12	

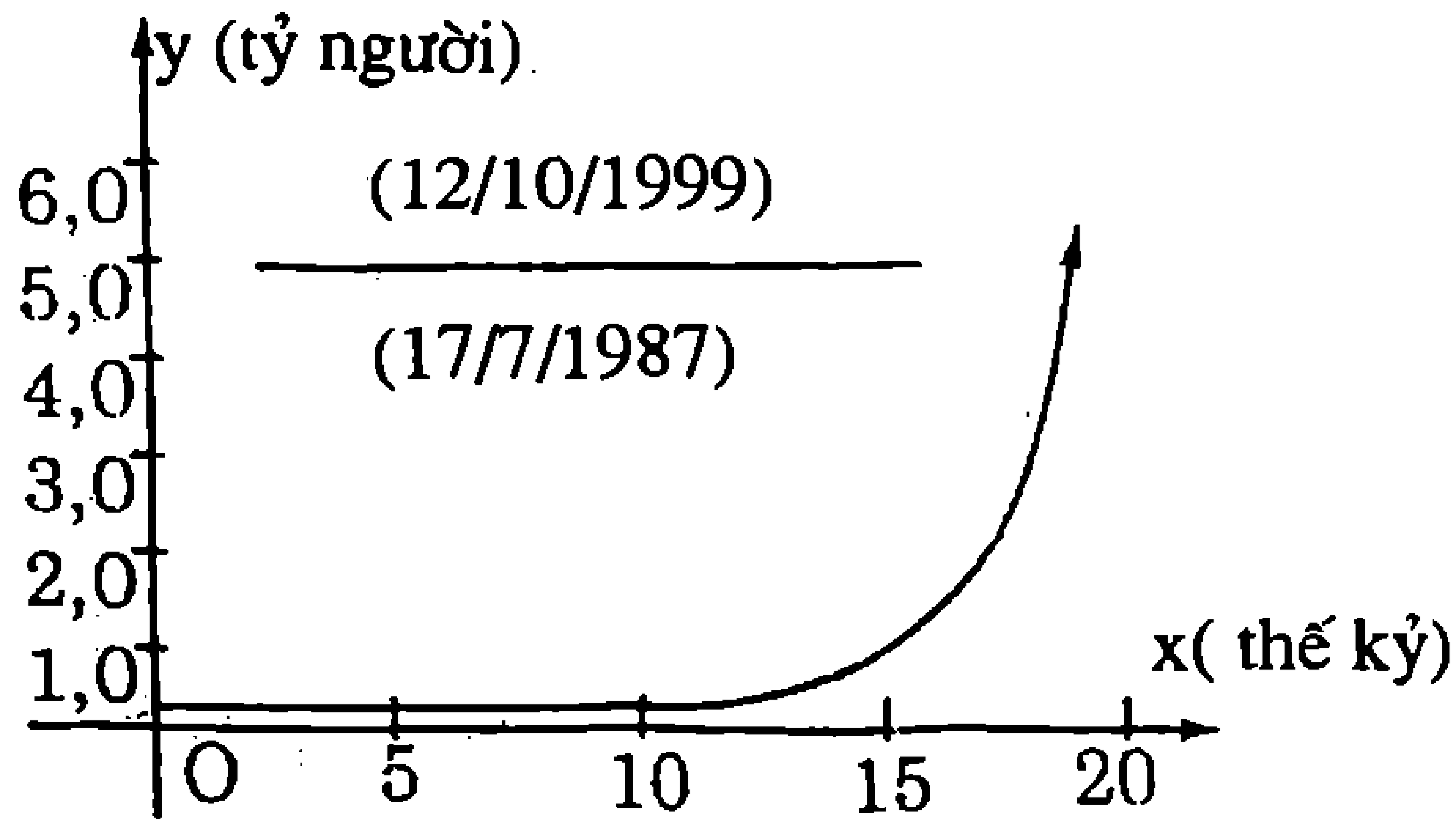
Nếu vẽ đồ thị, ta được đường cong ngày càng dốc đứng (hình 9-1).

Như vậy, nếu không có biện pháp hữu hiệu để ngăn chặn nạn gia tăng dân số thì Trái Đất của chúng ta đang bị đe dọa.

Năm 1972, Hội nghị Môi trường thế giới tại Stockholm thủ đô Thụy Điển đã nêu ra khẩu hiệu: "Chỉ có một Trái Đất”. Các nhà khoa học khuyến cáo rằng: "Trái Đất mà chúng ta đang dựa vào nó để sinh tồn này, nhiều nhất chỉ có thể nuôi sống 8-10 tỷ người". Năm 2000 dân số thế giới đã đạt 6,216 tỷ người, dự báo đến năm 2025 có thể 8,504 tỷ người. Nếu dân số thế giới còn tiếp tục tăng như vậy thì Trái Đất không có cách gì gánh nổi sức ép này, nhân loại sẽ tự huỷ diệt!

Đây có phải là lời đe dọa không? Không! Đây là lời cảnh báo của các nhà khoa học cho nhân loại.

Ngày 11/7/1987 công dân thứ 5 tỷ đã ra đời trên Trái Đất của chúng ta, đó là chú bé Matiga Gaspar ở thành phố Sankeopu của Nam Tư. Ngày hôm ấy Quỹ Ngân sách hoạt động dân số của Liên hợp quốc (UNFPA) đã tặng cho mỗi vị đứng đầu mỗi nước trên thế giới một chiếc "đồng hồ dân số" và ngày đó được lấy làm Ngày Dân số thế giới. "Đồng hồ dân số" là một loại máy tính giờ kỳ dị, ngoài chức năng đồng hồ thông thường ra, nó còn có thể hiển thị số dự báo tổng dân số thế giới vào giờ đó, phút đó và sự biến đổi dân số của các nước trong mỗi phút, nó luôn nhắc nhở các vị đứng đầu các nước coi trọng vấn đề dân số.



Hình 9-1

Ngày 12/10/1999 công dân thứ 6 tỷ của hành tinh chúng ta là một bé trai đã ra đời tại một bệnh viện ở Saraevo. Cậu không hề biết rằng, cậu đã trở thành một cái mốc để thế giới tính thêm những khó khăn do việc bùng nổ dân số gây ra.

Theo dự đoán, tháng 10/2011 công dân thứ 7 tỷ của hành tinh chúng ta sẽ ra đời.

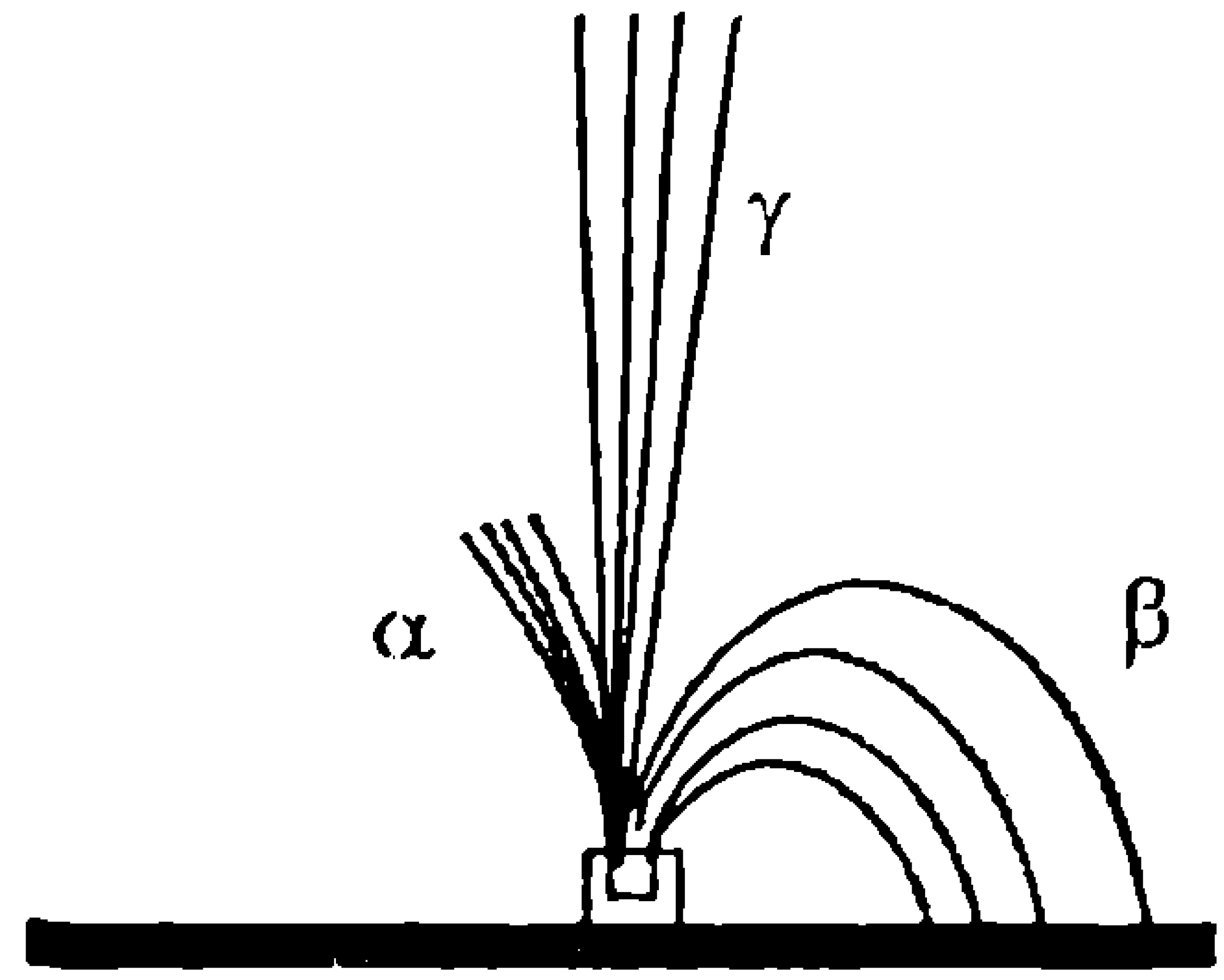
10. XÁC ĐỊNH QUÁ KHỨ VÀ DỰ ĐOÁN TƯƠNG LAI

Bạn đọc chắc còn nhớ ngài Tổng giám mục Usuore ở mục 5 có trình độ toán học quá kém. Trong câu chuyện đó, chúng ta đã biết: Các nhà khoa học nghiêm túc đã chứng minh sự thực đanh thép rằng, Trái Đất của chúng ta đã tồn tại 4,6 tỷ năm rồi. Nhân loại đã vận dụng trí tuệ của mình như thế nào để xác định quá khứ xa xăm như vậy?

M.S.Currie

Năm 1896, nhà vật lý học H.Beccoren người Pháp đã phát hiện ra rằng: hợp chất urani có thể phóng ra một tia mà mắt thường không thể trông thấy được. Loại tia này có thể cảm quang ở phim ảnh bọc trong giấy đen. Hiện tượng này của vật chất gợi lên sự chú ý của nhà khoa học nữ lừng danh thế giới Marie Sklodowska Curie (1867-1934) người Ba Lan. Bà nghĩ, chắc không phải chỉ có urani mới có thể phóng ra tia! Qua nghiên cứu chuyên tâm của bà, cuối cùng bà đã phát hiện ra một số nguyên tố có tính phóng xạ mạnh hơn.

Năm 1903, các nhà vật lý học người Anh đã thực hiện một thực nghiệm cực kỳ tài tình, chứng thực tia phóng xạ có ba loại và đồng thời với việc phóng ra các tia, bản thân có một bộ phận chuyển thành vật chất khác. Tốc độ biến chất không chịu ảnh hưởng của thay đổi nhiệt độ, phản ứng hoá học và các điều kiện ngoại cảnh khác. Qua sự cố gắng không mệt mỏi của các nhà khoa học, người ta đã làm rõ được quy luật của lượng chất phóng xạ: lượng biến đổi Δm của chất phóng xạ tỷ lệ thuận với khối lượng m của chất phóng xạ lúc đó và thời gian biến đổi:



$$\Delta m \text{ tỷ lệ thuận với } -m\Delta t \quad (10\text{-}1)$$

Trong (10-1), dấu trừ chứng tỏ rằng, sau khi biến đổi thì khối lượng chất phóng xạ sẽ giảm.

Viết lại (10-1) tương tự như (6-5):

$$\Delta m \approx -km\Delta t \quad (10\text{-}2)$$

Tương tự (6-6), ta có:

$$m = m_0 e^{-kt} \quad (10\text{-}3)$$

Sau đây ta xem, cần bao nhiêu thời gian mới có thể làm cho chất phóng xạ giảm đi còn một nửa so với ban đầu:

Gọi $m = \frac{1}{2} m_o$. Từ (10-3), ta có:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

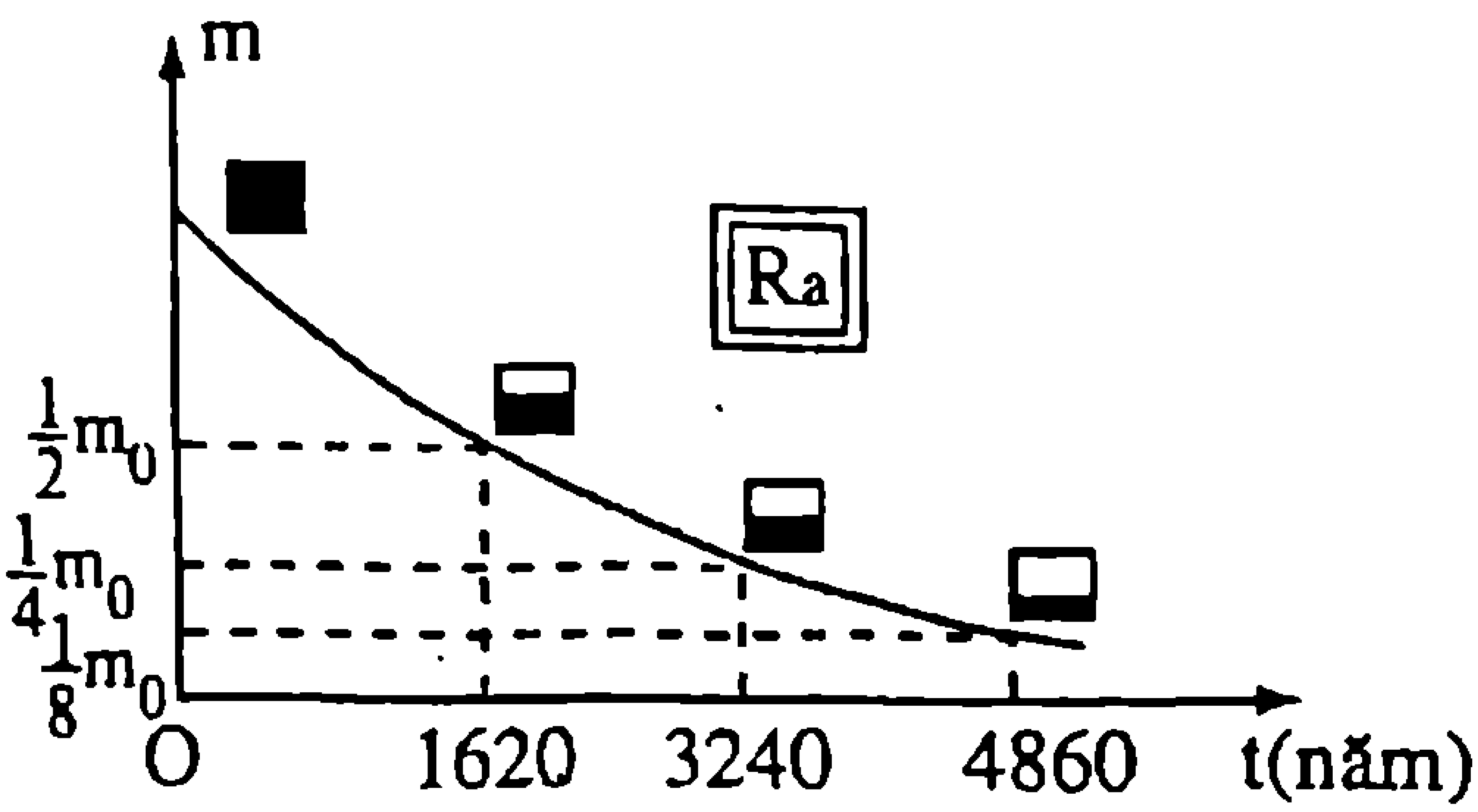
$$\lg\frac{1}{2} = -kt\lg e \quad (10\text{-}4)$$

Từ (10-4), ta có:

$$t = \frac{\lg 2}{k \lg e} = 0,693 \times \frac{1}{k} \qquad (10\text{-}5)$$

Từ (10-5), ta thấy: t là đại lượng không đổi, chỉ có quan hệ với bản thân chất phóng xạ gọi là chu kỳ bán rã của chất phóng xạ.

Hình 10-1 thể hiện sự phân rã của radium: cứ 1620 năm thì khối lượng giảm đi một nửa.



Hình 10-1

Bảng 10-1 là chu kỳ bán rã của một số chất phóng xạ quan trọng.

Bảng 10-1

Nguyên tố	Ký hiệu nguyên tố đồng vị	Chu kỳ bán rã
Thori	Th 232	$1,33 \times 10^{10}$ năm
Urani I	U 238	$4,56 \times 10^{10}$ năm
Urani II	U 234	$2,48 \times 10^{10}$ năm
Radium	Ra 226	1620 năm
Poloni I	Po 210	138 ngày
Poloni II	Po 214	$1,50 \times 10^{-4}$ năm
Poloni III	Po 216	0,16 giây

Urani là một chất phóng xạ thường gặp nhất. Từ bảng 10-1, ta thấy: Chu kỳ bán rã của urani là 4560 triệu năm, tức là sau 4560 triệu năm thì khối lượng urani còn lại một nửa. Do sau khi urani phóng xạ sẽ biến thành chì, vì thế chúng ta chỉ cần căn cứ vào lượng urani còn lại và lượng chì trong nham thạch hiện nay là có thể tính ra được tuổi của nham thạch. Các nhà toán học đã dùng phương pháp này để xác định được tuổi của nham thạch cổ xưa nhất trên Trái Đất là 3 tỷ năm, đương nhiên tuổi của Trái Đất lớn hơn, tính ra là 4,6 tỷ năm.

Phương pháp khoa học vừa nêu, chẳng những có thể xác định được quá khứ, mà còn có thể dự đoán tương lai một cách khoa học. Dự đoán thường mang theo màu sắc thần bí, song trong mây mù dày đặc có tính chất thần bí đó, tính khoa học thường bị coi nhẹ.

Rất khó có được câu chuyện có thể nói rõ điều này sinh động hơn câu chuyện "Đại lực sĩ" dưới ngòi bút của Zuler Fanna trong bộ tiểu thuyết "Mathis Santov":

"... Đã chuyển đi vật đỡ hai bên thân thuyền để chuẩn bị hạ thuỷ chiếc "Trapocro". Chỉ cần cởi bỏ cáp, thuyền sẽ trượt xuống. Đã có 5-6 thợ mộc bận rộn dưới bộ khung thuyền. Người xem đầy lòng hiếu kỳ, chăm chú xem công việc này. Lúc đó lại có một chiếc canô vòng qua chỗ bờ nhô ra để vào cảng, nhưng phải đi qua trước chiếc "Trapocro" đang chuẩn bị hạ thuỷ cho nên vừa nghe thấy canô phát tín hiệu, những người trên thuyền đã ngừng ngay thao tác cởi cáp, nhường canô qua trước. Giả sử chiếc canô đang quay ngang, còn chiếc thuyền thì đang xông tới bằng tốc độ rất cao, chắc chắn canô bị đâm chìm.

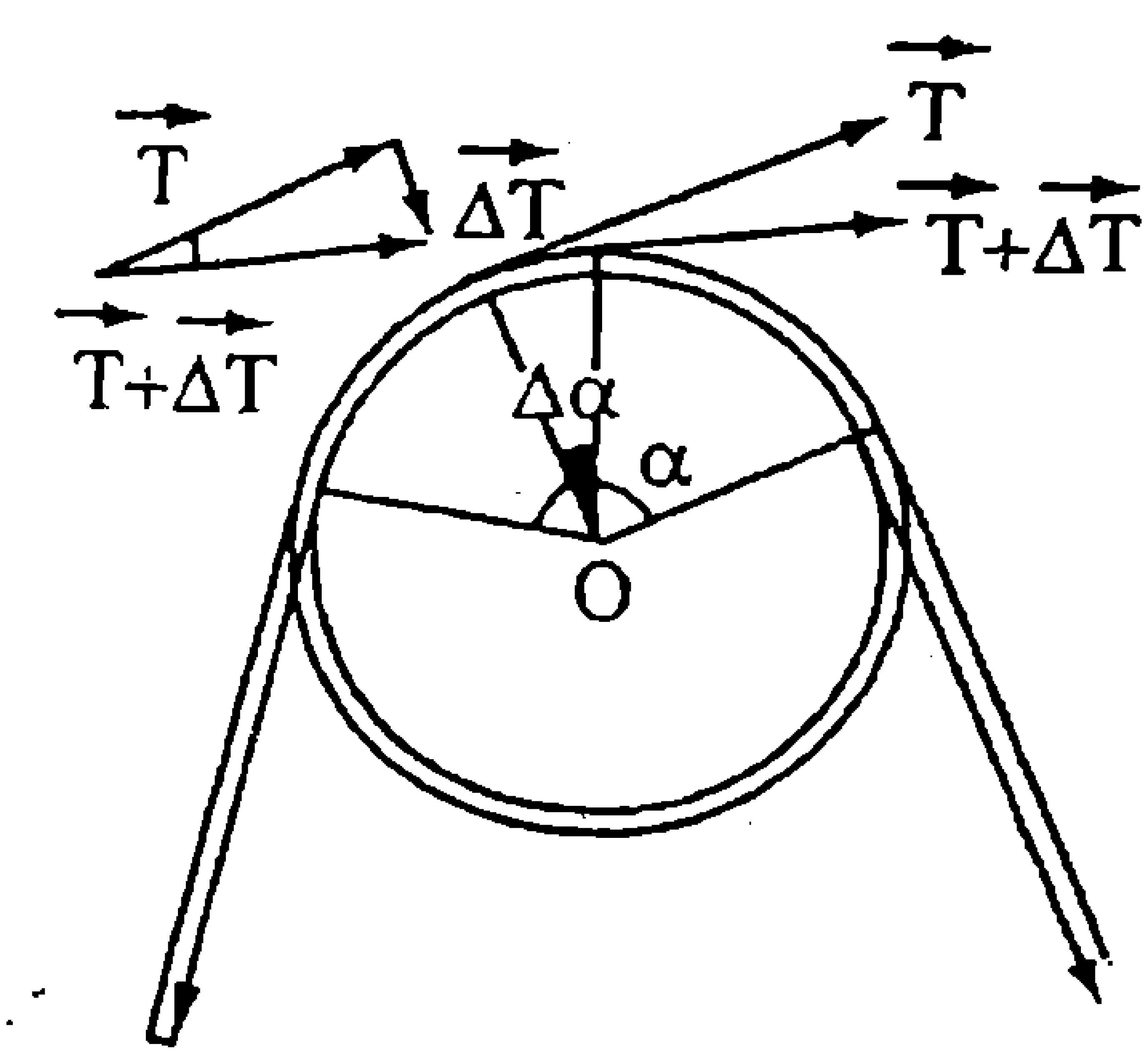
Các thợ mộc dừng đập búa. Mọi con mắt đều đổ dồn vào con thuyền hoa lệ này. Cánh buồm trắng dưới ánh nắng buổi chiều như được mạ vàng. Canô đã xuất hiện đúng trước thuyền.

Đột nhiên một tiếng kêu kinh sợ, khi thuyền bắt đầu lắc lư trượt xuống: thuyền sắp va vào canô! Muộn mất rồi, hiểm họa sắp xảy ra!

Bỗng xuất hiện một người, anh ta nắm lấy dây chão phía trước thuyền, ra sức kéo lại, anh ta cong người gần sát mặt đất. Chưa đầy một phút, anh ta đã quấn được dây chão vào cọc sắt đóng trên bờ. Bất chấp nguy hiểm đến tính mạng, anh ta dùng hết sức lực của đôi tay kéo giữ dây chão khoảng 10 giây. Cuối cùng dây chão đứt. Nhưng thời gian 10 giây cũng đủ để "Trapocro" sau khi xuống nước chỉ quệt nhẹ một chút vào canô rồi lướt đi.

Canô đã thoát hiểm. Người đã có hành động dũng cảm đó là Matiff ...".

Sau đây chúng ta hãy phân tích một chút về hiểm họa này bằng phương pháp toán học:



Hình 10-2

Trong cuốn "Dẫn luận, phân tích vô cùng nhỏ" của nhà toán học L.Euler xuất bản năm 1748, ông đã phân tích vấn đề ma sát bánh xe lăn (hình 10-2). L.Euler đã phát hiện ra rằng, đối với góc quay $\Delta\alpha$ rất nhỏ thì trị số chênh lệch lực căng ΔT của dây chão tỷ lệ thuận với T và $\Delta\alpha$, tức là:

$$\Delta T \text{ tỉ lệ thuận với } T\Delta\alpha \qquad (10\text{-}6)$$

Viết (10-6) tương tự (10-2), ta có:

$$\Delta T = -kT\Delta\alpha \qquad (10\text{-}7)$$

trong đó k - hệ số ma sát.

Trong (10-7), dấu trừ thể hiện lực căng, trong trường hợp này bị giảm nhỏ.

Tương tự (10-3), ta có:

$$T = T_0 e^{-k\alpha} \tag{10-8}$$

Đây chính là công thức nổi tiếng của L.Euler về ma sát bánh xe lăn.

Bây giờ chúng ta trở lại câu chuyện. Giả sử trọng lượng thuyền là 50 tấn, độ dốc mái trượt là 1:10 thì lực trượt của thuyền khoảng 5 tấn, tức là 5000kg. Lại giả sử Matiff kịp quấn dây chão 3 vòng lên cọc sắt, tức là $\alpha = 2\pi \times 3 = 6\pi$, còn hệ số ma sát giữa dây chão và cọc sắt $k = 0,33$. Thay các trị số này vào (10-8) ta tính được sức lực cần thiết của Matiff giữ một đầu dây T(kg) là:

$$T = 5000 \times e^{-0,33 \times 6\pi}$$

$$\begin{aligned} \lg T &= \lg 5000 - 0,33 \times 6 \times 3,1416 \lg e \\ &= 3,6990 - 0,33 \times 6 \times 3,1416 \times 0,4343 \\ &= 0,9975 \end{aligned}$$

Vậy: $T = 9,943$(kg).

Dưới ngòi bút của Zuler Fanna, Matiff có sức chống được "gió to sóng cả". Tuy vậy, trong trường hợp này sức lực đó chỉ được dùng chưa đầy 10kg. Điều này ngay cả một thiếu niên cũng có thể làm được! Nhưng chắc chắn Matiff cần có đủ lòng gan dạ và kiến thức! Mặc dù các nhà khoa học đã chứng minh được Matiff chỉ dùng sức lực chưa đầy 10kg nhưng nhân loại vẫn cảm ơn Zuler Fanna, bậc thầy của văn học Pháp, cha đẻ của tiểu thuyết viễn tưởng khoa học, đã để lại cho chúng ta một câu chuyện hồi hộp đầy ý nghĩa.

11. ĐẠI LƯỢNG KHÔNG ĐỔI TRONG ĐẠI LƯỢNG BIẾN ĐỔI

Ngành tài chính có rất nhiều vấn đề quan hệ gắn bó chặt chẽ với tính toán toán học. Trong các mục trước chúng ta đã không chỉ một lần nhìn thấy: Một món tiền ban đầu không lớn lắm nhưng sau một thời gian dài gửi ngân hàng đã biến thành số tiền khổng lồ.

Trong tiền gửi ngân hàng ngày nay, lãi suất gửi kỳ hạn 1 năm thường cao hơn lãi suất gửi kỳ hạn 6 tháng, càng cao hơn lãi suất gửi kỳ hạn 3 tháng. Bạn đọc có thể cho rằng đây chỉ là để khuyến khích mọi người gửi tiết kiệm kỳ hạn dài. Bởi vì, nếu như lãi suất gửi dài hạn không cao hơn gửi ngắn hạn một mức độ nhất định thì ngắn hạn chắc chắn sẽ có lợi cho người gửi hơn.

Để nói rõ hơn về điều này, chúng ta hãy tính toán cụ thể.

Giả sử lãi suất năm là 12,5%. Một người A gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng. Dễ dàng tính ra được sau 8 năm anh ta lấy ra cả vốn lẫn lãi là 200 triệu đồng (gọi là a_1).

Lại có một người B cũng gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng. Sau 4 năm B lấy ra, lại gửi cả vốn lẫn lãi vào ngân hàng. Dễ dàng tính ra sau 8 năm B thu về cả vốn lẫn lãi là:

$$a_2 = 100 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 225 \text{ triệu đồng}$$

Hãy xem! B chia tiền gửi 8 năm ra để gửi hai lần 4 năm, chỉ làm thêm thủ tục một lần gửi nữa mà được thêm 25 triệu đồng, tương đương $\frac{1}{4}$ tiền vốn, có thể coi là một số tiền không nhỏ!

Lại có người C, người D, người E mỗi người cũng gửi 100 triệu đồng nhưng lần lượt chia đều 8 năm làm ba lần gửi, bốn lần gửi và năm lần gửi. Mỗi lần sau khi lấy ra lại gửi ngay cả vốn lẫn lãi vào ngân hàng và đến hết 8 năm từng người lần lượt được số tiền (triệu đồng) là:

$$a_3 = 100 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 237,04$$

$$a_4 = 100 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 244,14$$

$$a_5 = 100 \times \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 248,83$$

Cũng vậy, lại có một người N, cũng gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng nhưng chia kỳ hạn 8 năm thành n lần gửi. Sau mỗi lần lấy ra lại gửi ngay vào và sau 8 năm có thể được (triệu đồng):

$$a_n = 100 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Có thể chứng minh được rằng, khi chia kỳ hạn càng ngắn thì tổng vốn và lãi nhận được càng cao. Song, khi tăng lện vô hạn, đại lượng biến đổi a_n cũng không thể tăng lên vô hạn, nó bị giới hạn bằng một đại lượng không đổi, đó là:

$$a = \lim_{x \to \infty} a_n$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[100 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$$

$$= 100 \times e = 271,83 \text{ (triệu đồng)}$$

Để tránh tình trạng người gửi không tiếc bỏ thời gian nhiều lần lấy ra gửi vào để mưu cầu lãi cao thì lãi suất hàng năm của kỳ hạn gửi 8 năm phải không thấp hơn:

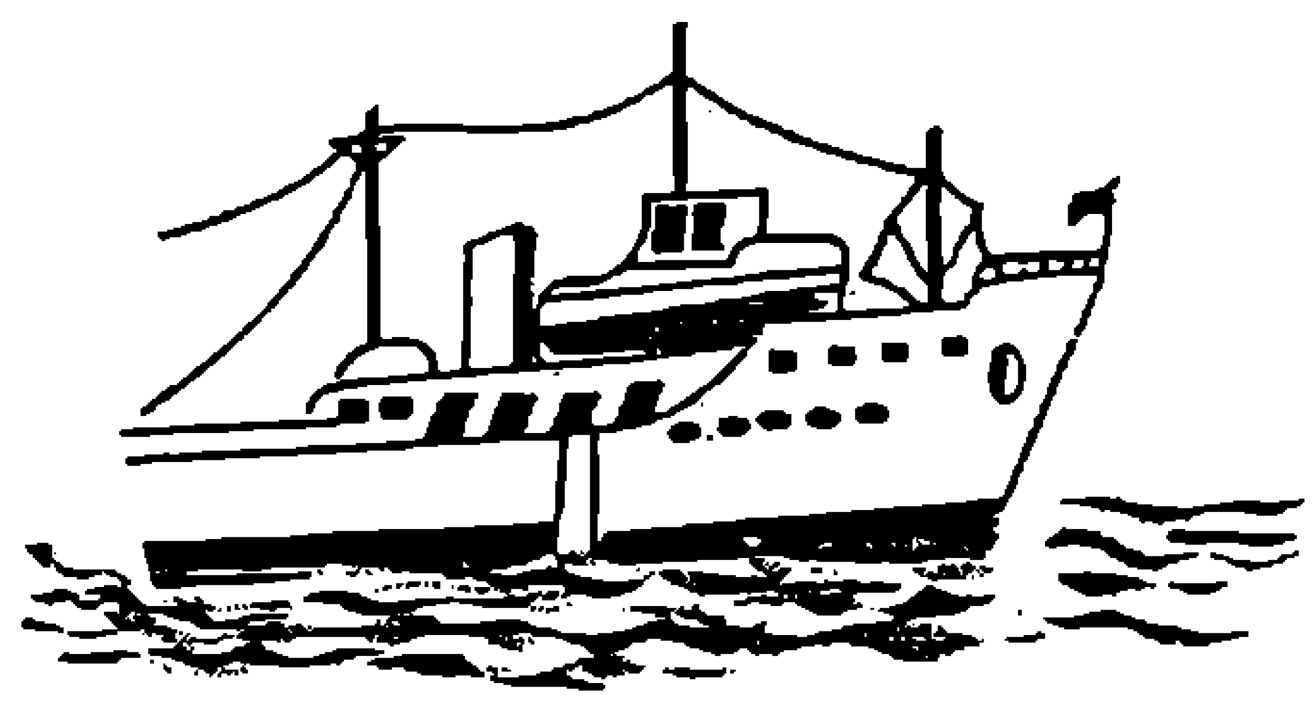
$$p=\frac{\frac{a}{100}-1}{8}=\frac{2,7183-1}{8}=0,2148$$

tức là p = 21,48%.

Đại lượng không đổi trong đại lượng biến đổi, thường giống như trị số cực hạn trong ví dụ nêu trên. Đối với các đại lượng không đổi ẩn chứa trong đại lượng biến đổi, ý nghĩa đặc thù của nó có lúc phải đợi đến khi giải được đáp án mới có thể biết được.

Sau đây là câu đố trí tuệ:

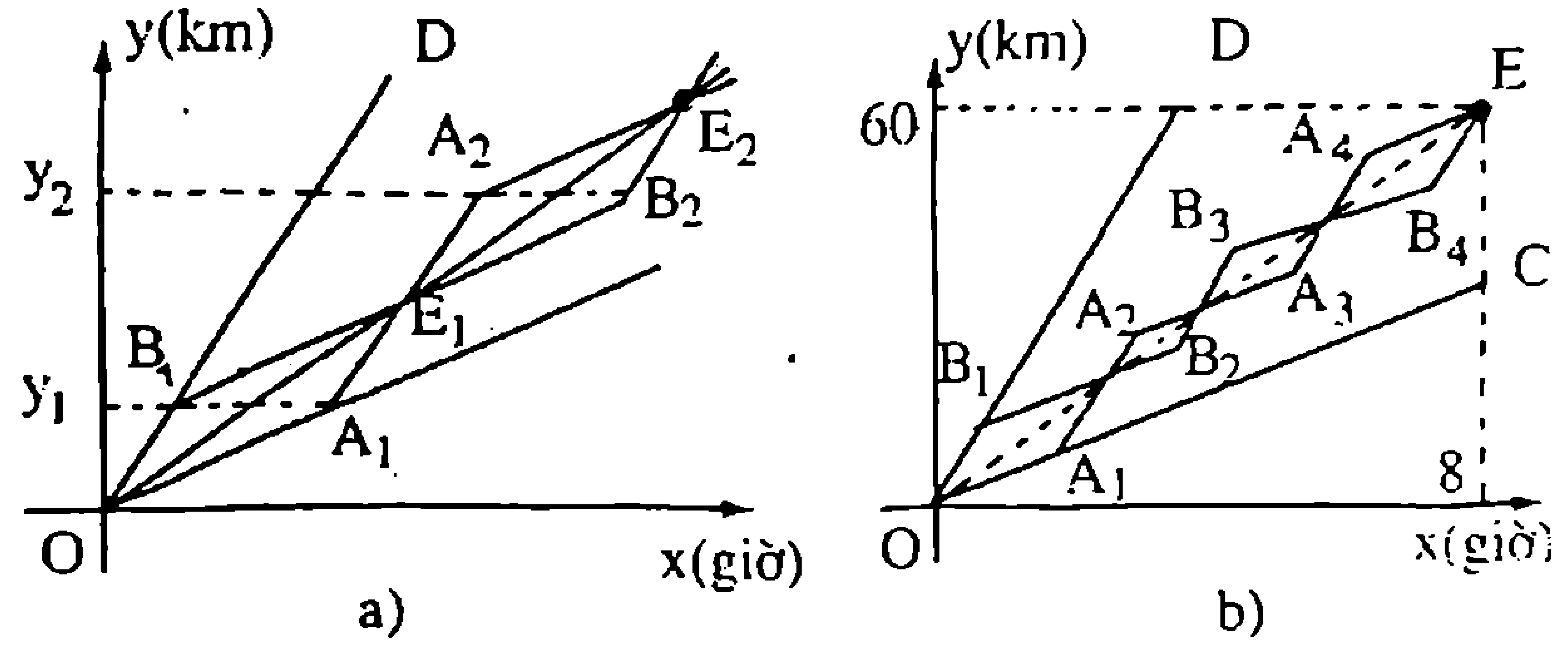
Một con tàu lớn, thang dây bên mạn tàu có 13 bậc, khoảng cách mỗi bậc 30cm, có 3 bậc cuối đã bị ngập nước. Lúc đó sóng yên, biển lặng nhưng về sau thuỷ triều dâng lên với tốc độ 15cm mỗi giờ. Hỏi bao nhiêu lâu sau lại có 3 bậc nữa bị ngập?



Đáp án: Nước lên, tàu nổi theo!

Trong cuốn "Toán học lý thú" của Corerammuxki có một câu chuyện như sau:

Hai người A và B đi du lịch bằng hai xe đạp. Đi được một đoạn đường thì người A hỏng xe, hai người đành dừng lại để sửa nhưng cuối cùng không có cách gì sửa được xe nên họ đành quyết định bỏ xe hỏng lại, tiếp tục đi. Song lúc này họ chỉ còn một xe nên đã thoả thuận: một người đi xe, một người đi bộ. Người đi xe đến một nơi nào đó thì để xe lại, chuyển sang đi bộ, còn người đi bộ phía sau khi gặp xe thì chuyển sang đi xe. Đi được một đoạn vượt người đi bộ khá xa thì lại để xe cho người phía sau. Cứ như vậy, hai người thay phiên nhau đi xe. Hỏi từ khi người A hỏng xe, cần ít nhất bao nhiêu thời gian thì hai người mới có thể đến đích? Biết rằng khoảng cách từ chỗ hỏng xe (O) đến đích (E) là 60km, tốc độ đi xe đạp là 15km/h, tốc độ đi bộ là 5km/h (hình 11-1).



Hình 11-1

Lấy O làm điểm gốc, thời gian là trục Ox, khoảng cách là trục Oy. Do tốc độ đi bộ và tốc độ đi xe đạp đều là đại lượng không đổi trong quá trình biến đổi, vì thế chúng được biểu diễn lần lượt là đường thẳng OC và đường thẳng OD trong hệ tọa độ xOy.

Gọi E_1 và E_2 lần lượt là địa điểm hai người A và B gặp nhau lần 1 và lần 2 sau khi hỏng xe (hình 11-1a). Lúc này A đi bộ trước đến A_1, sau đó đi xe đạp qua E_1 đến A_2, lại chuyển sang đi bộ đến E_2; còn B thì đi xe đạp trước đến B_1, sau đó đi bộ qua E_1 đến B_2 lại chuyển sang đi xe đạp đến E_2. Đương nhiên sau khi gặp nhau ở E_2, mỗi người lại vẫn tiếp tục đi luân phiên như cũ. Do tốc độ đi xe đạp và tốc độ đi bộ trước sau không đổi, nên các đoạn đường biểu diễn đi xe đạp phải song song với nhau và các đoạn đường biểu diễn đi bộ cũng phải song song với nhau, tức là hai tứ giác $OA_1E_1B_1$ và $E_1B_2E_2A_2$ đều là hình bình hành.

Lại chú ý tới A, chuyển đi bộ sang đi xe đạp với B chuyển đi xe đạp sang đi bộ ở cùng một địa điểm, vì thế đoạn A_1B_1 và A_2B_2, ... đều song song với trục Ox.

Giả sử địa điểm hai lần chuyển xe cách O lần lượt là y_1 và y_2(km) và phương trình OC, OD là:

$$y = 5x$$

$$y = 15x$$

thì sẽ có được tọa độ hai điểm A và B như sau:

$$A\left(\frac{y_1}{5}, y_1\right);\ B\left(\frac{y_1}{15}, y_1\right) \qquad (11\text{-}1)$$

Từ (11-1) ta có tọa độ của điểm E_1 (x_{E_1}, y_{E_1}) là:

$$\left.\begin{aligned} x_{E_1} &= x_A + x_B = \frac{y_1}{5} + \frac{y_1}{15} = \frac{4}{15}y_1 \\ y_{E_1} &= y_A + y_B = y_1 + y_1 = 2y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}2)$$

Từ (11-2) ta có:

$$y_{E_1} = (2y_1 \times x_{E_1}) : \frac{4}{15}y_1 = \frac{15}{2}x_{E_1} \qquad (11\text{-}3)$$

Từ (11-3) ta thấy rằng, điểm E_1 ở trên đường thẳng có độ nghiêng $\frac{15}{2}$ xuất phát từ O.

Tương tự với E_2, E_3, ... cũng ở trên đường thẳng có độ nghiêng $\frac{15}{2}$ xuất phát từ O.

Mặt khác, do đích E cách điểm gốc O một khoảng 60km (hình 11-1b) vì thế thời gian đến E phải thoả mãn:

$$60 = \frac{15}{2}x \qquad (11\text{-}4)$$

Từ (11-4), ta có:

$$x = 60 : \frac{15}{2} = 8 \text{ (giờ)}$$

Kết quả này chứng tỏ rằng, dù cho hai người A và B đi xe đạp và đi bộ chuyển đi chuyển lại trên đường như thế nào, chỉ cần cùng đến đích thì thời gian đến đích luôn là 8 giờ. Loại đại lượng không đổi trong đại lượng biến đổi này hoàn toàn không phải tất cả mọi người ngay từ đầu đều có thể biết được.

Có lúc, trong một số đại lượng biến đổi nào đó luôn giữ quan hệ riêng. Một ví dụ thường gặp nhất, đó là biểu thức quan hệ sau đây của hai số dương x_1 và x_2:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \qquad (11\text{-}5)$$

Từ (11-5) biến đổi được:

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0 \qquad (11\text{-}6)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (11-6) chỉ được xảy ra khi $x_1 = x_2$.

Tương tự (11-5) có thể mở rộng ra n số, tức là đối với n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$, ta có:

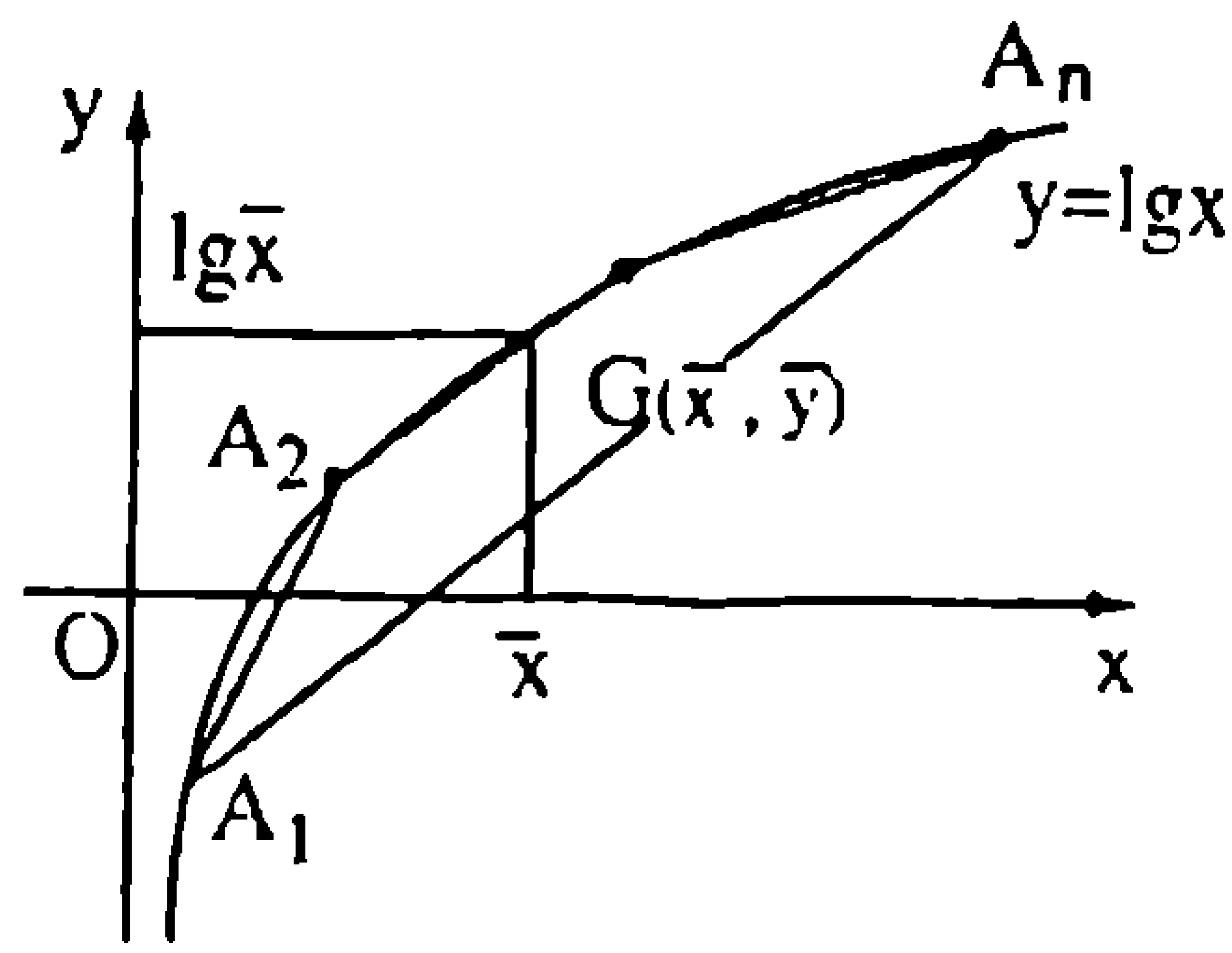
$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \qquad (11\text{-}7)$$

Dấu bằng trong (11-7) đương nhiên cũng chỉ được xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Một chứng minh đơn giản mà tài tình của (11-7) là lợi dụng tính lồi của đồ thị hàm số logarit y = lgx. Cái được gọi là tính lồi (lõm) của đồ thị hàm số trong một ô tọa độ là chỉ: đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trên đồ thị hàm số của ô tọa độ đó hoàn toàn nằm ở phía dưới (hoặc phía trên) của đồ thị hàm số.

Tính lồi của đồ thị hàm số logarit $y = \lg x$ rất dễ dàng chứng minh, bạn đọc có thể tự làm được.

Đặt $x_1, x_2, ..., x_n$ là n số dương, xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn. Lại đặt A_i là điểm trên đồ thị $y = \lg x$, tương ứng với hoàng độ là x_i ($i = 1, 2, ..., n$). Dễ thấy hình đa giác $A_1A_2...A_n$ là hình đa giác lồi, vì thế trọng tâm hệ điểm $G(\overline{x}, \overline{y})$ tất phải ở trong đồ thị, tức là ta có (hình 11-2):



Hình 11-2

$$\lg \overline{x} \geq \overline{y} \tag{11-8}$$

Mà:

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \\ \overline{y} = \dfrac{\lg x_1 + \lg x_2 + ... + \lg x_n}{n} = \lg \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \end{cases} \tag{11-9}$$

Từ (11-8) và (11-9), ta có:

$$\lg \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \lg \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \tag{11-10}$$

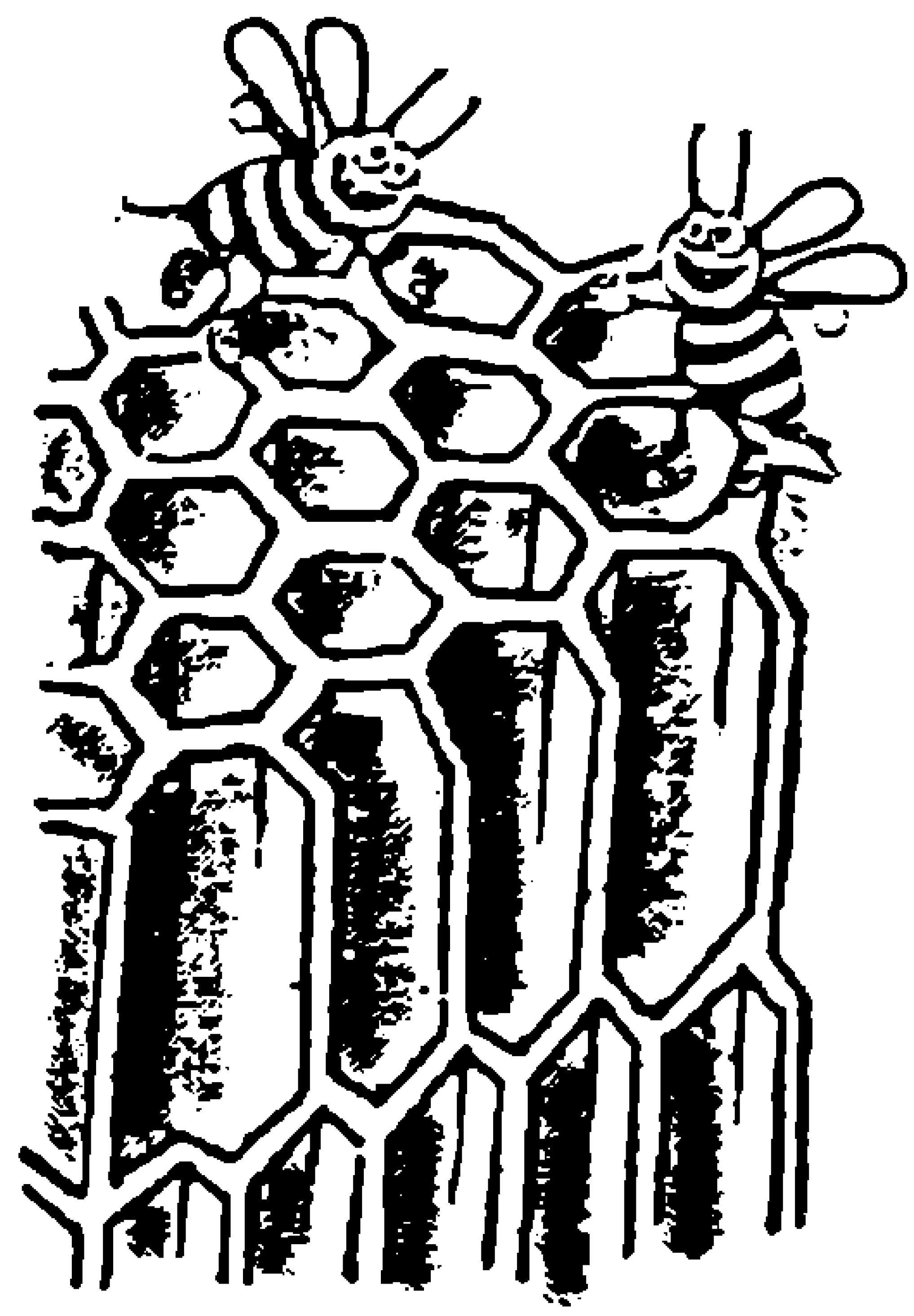
Từ (11-10), ta được:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \tag{11-7}$$

Bất đẳng thức (11-7) được gọi là bất đẳng thức Cauchy và có ứng dụng rộng rãi ở rất nhiều lĩnh vực của toán học. Ở những mục sau, bạn đọc sẽ phát hiện không chỉ một lần những ứng dụng lý thú của bất đẳng thức này.

12. CHÂN LÝ MÀ ONG MẬT ĐÃ THỂ HIỆN

Người ta thường nói: "Cái gì do thiên nhiên sáng tạo ra, đều có lý do, đều hợp lý...". Câu nói này rất đúng cho trường hợp cấu tạo tổ ong.



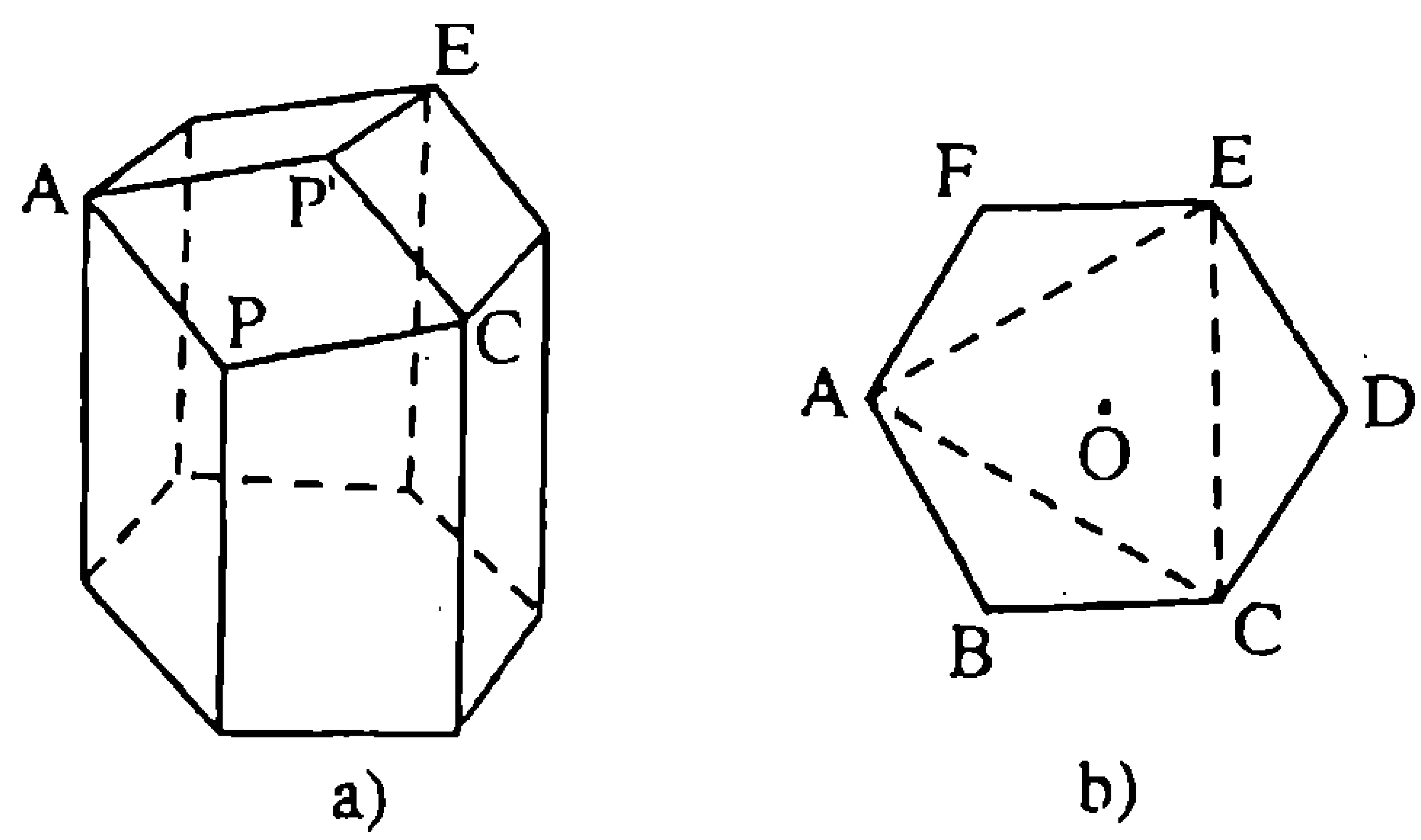
Hình 12-1

Hình 12-1 là mặt cắt hình khối của tổ ong. Bạn đọc có thể thấy rõ: Lỗ tổ ong là các hình lăng trụ lục giác đều, kích thước bằng nhau, xếp cạnh nhau, mỗi tổ được bao quanh bằng 6 lỗ. Điều làm cho người ta kinh ngạc là đáy của các lăng trụ này không phẳng, cũng không phải mặt cầu tròn, mà là đỉnh nhọn do 3 mặt hình thoi bằng nhau tạo thành (hình 12-2a).

Tại sao tổ ong lại có cấu tạo như vậy?

Chúng ta có thể tưởng tượng: Lấy cái bút chì 6 cạnh mới mua về, chưa vót thì hình dạng đầu bút chì đó là một hình lục giác đều ABCDEF như hình 12-2b.

Nếu ta dùng 3 hình thoi bằng nhau ghép lại theo đỉnh P' và 6 cạnh còn lại trùng khít với 6 cạnh của đáy hình lăng trụ đều thì được lỗ tổ ong ở hình 12-2a.

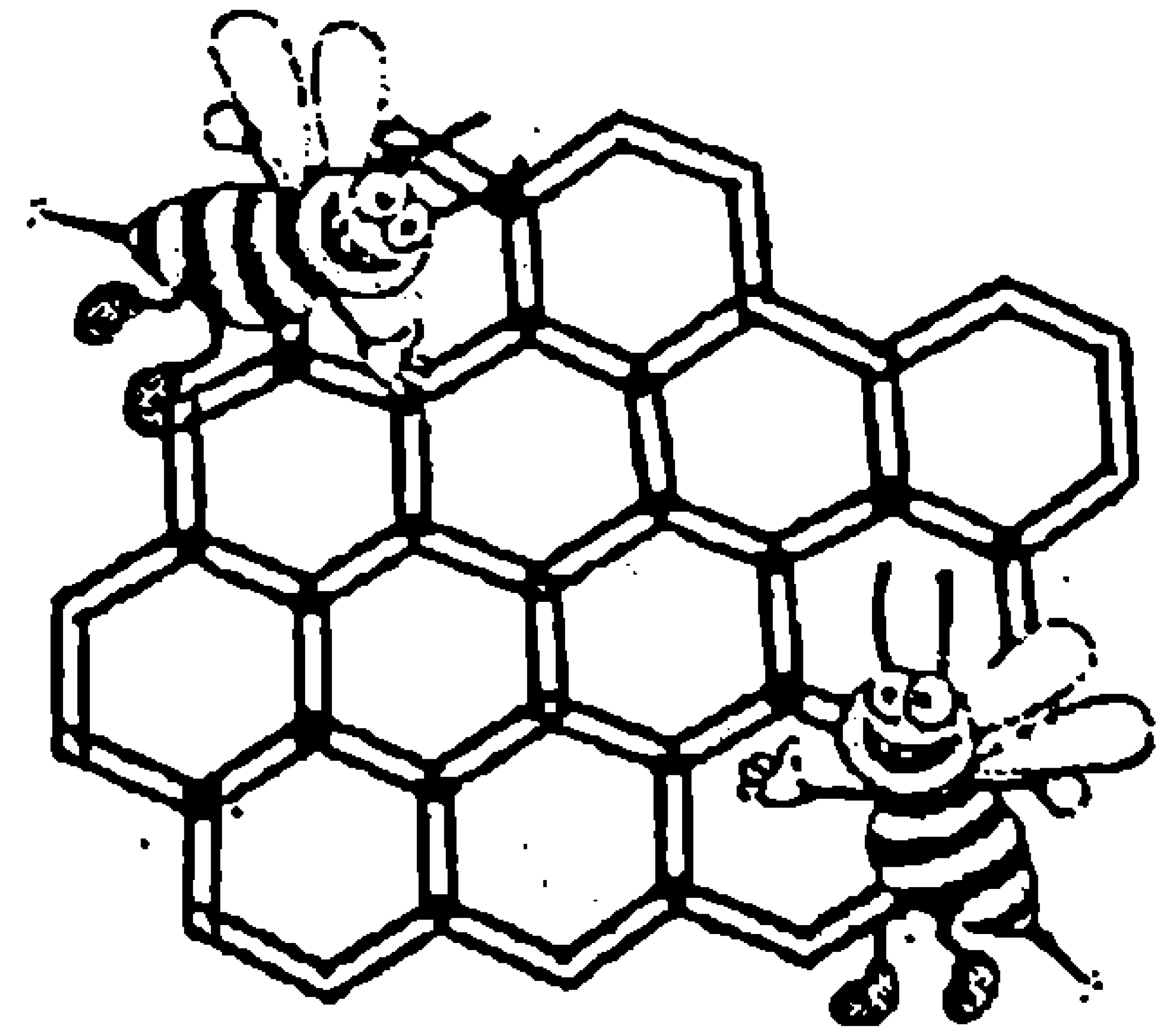


Hình 12-2

Chân lý mà thiên nhiên tạo ra có khi phải cần mấy thế kỷ mới làm rõ được những bí ẩn trong đó. Từ rất lâu rồi, cấu tạo bí ẩn của tổ ong đã được nhiều người nghiên cứu, đặc biệt là các nhà toán học.

Vào thế kỷ III, nhà thông thái Pappus ở thành phố Alexandri thuộc Hy Lạp cổ đại đã nghiên cứu tổ ong và đặt ra câu hỏi: Liệu có phải tổ ong có cấu tạo như vậy để vật liệu sáp ong xây nên tổ ong là tiết kiệm nhất không?

Đầu thế kỷ XVII, nhà thiên văn học nổi tiếng và cũng là nhà sinh vật học Kaiphuxin người Pháp cũng nghiên cứu cấu tạo tổ ong và suy đoán tương tự Pappus.



Sau đây ta xem vì sao tiết diện lỗ tổ ong lại có hình lục giác đều?

Điều này không khó lý giải: Đầu tiên là lỗ tổ ong không thể là hình tròn, mặc dù trong các hình cùng chu vi thì hình tròn có diện tích lớn nhất, thế nhưng nếu xếp các hình tròn kề sát nhau trong mặt phẳng thì giữa chúng sẽ có các khe hở, phải tốn vật liệu để trám các khe hở này. Do vậy, tiết diện lỗ tổ ong phải là đa giác đều.

Bạn đọc chỉ cần lưu ý rằng, tại một đỉnh ghép, các góc phải có khả năng ghép thành một góc đầy. Điều kiện này chỉ có ba loại đa giác đều thoả mãn: tam giác đều, hình vuông và lục giác đều. Tuy nhiên, từ bảng 12-1 ta thấy rằng, trong ba loại đa giác đều đó thì lục giác đều là hình kinh tế nhất.

Bảng 12-1

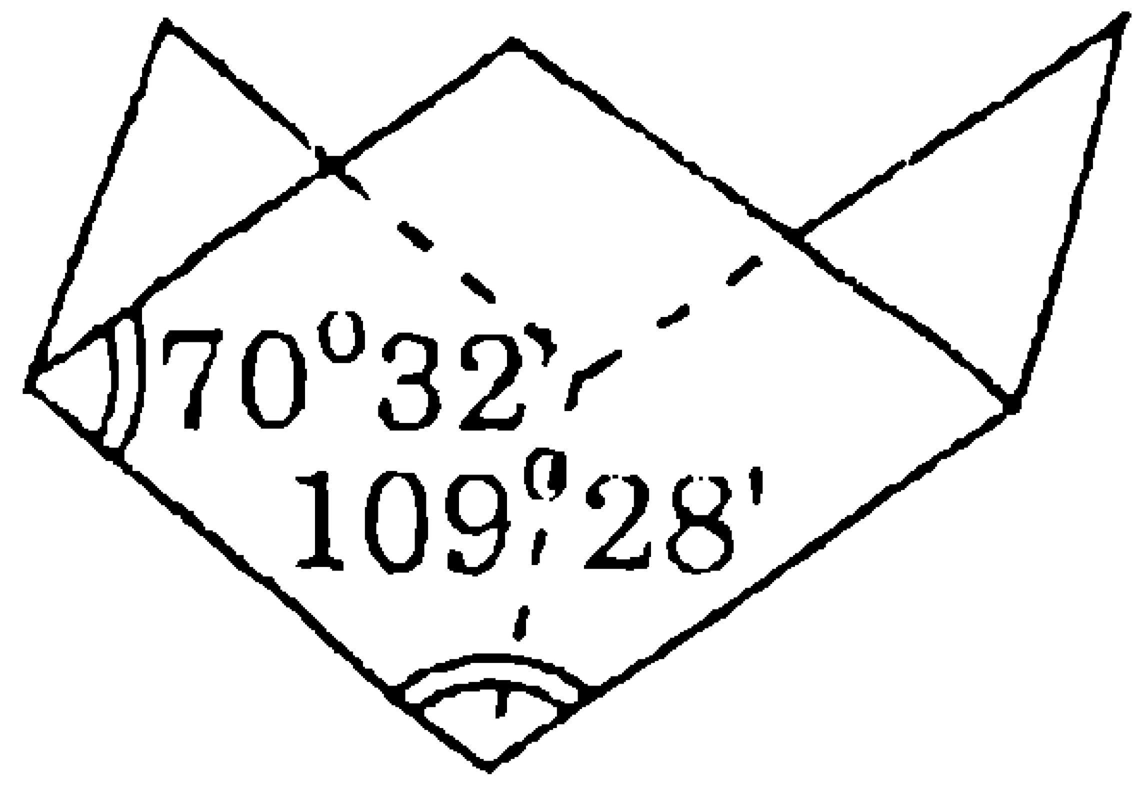
Loại đa giác đều	Diện tích	Chiều dài cạnh hoặc bán kính	Chu vi
Hình tam giác đều	1	1,5197	4,559
Hình vuông	1	1	4,000
Hình lục giác đều	1	0,6204	3,722
Hình tròn	1	0,5642	3,545

Người ta cũng tính toán được rằng: Để con ong chui được vào lỗ thì chu vi của tam giác đều phải bằng 24,4mm, của hình vuông bằng 18,7mm và của lục giác đều bằng 16,6mm. Hơn nữa, người ta đã phát hiện ra rằng: Mọi vật thể lăng trụ khi ép theo bốn phía: trước - sau, phải - trái thì tiết diện ngang của nó sẽ biến thành hình lục giác đều và về mặt cơ học, lục giác đều là hình ổn định nhất.

Tuy vậy, cấu tạo của đáy lỗ tổ ong thì không lý giải dễ dàng được.

Đầu thế kỷ XVIII, học giả Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) người Pháp đã đo đạc cẩn thận và rút ra kết luận khiến người ta kinh ngạc: Mỗi tấm sáp hình thoi ghép thành đáy lỗ tổ ong đều có góc tù bằng 109°28' và góc nhọn 70°32' (hình 12-3).

Nhà vật lý R.A.F.de Reaumus (1683-1757) người Pháp biết được kết luận của P.L.M.de Maupertuis. R.A.F.de Reaumus suy đoán rằng: Đáy lỗ tổ ong cấu tạo như vậy có lẽ tiết kiệm vật liệu nhất. Tuy vậy, ông không chứng minh được điều này nên đã hỏi nhà toán học Samuel Koenig (1712-1757) người Thụy Sỹ, và viện sĩ Viện khoa học Paris. S.Koenig đã tính toán cẩn thận và đưa ra kết luận: Theo tính toán lý thuyết, nếu xây dựng lỗ tổ ong cùng thể tích mà sử dụng vật liệu ít nhất thì hai góc hình thoi ghép thành đáy lỗ phải là 109°26' và 70°34'. Như vậy, kết quả này chỉ sai khác so với kết quả đo thực tế của P.L.M.de Maupertuis có 2'.



Hình 12-3

Người ta tán thưởng về kết quả tính toán của S.Koenig và cho rằng thiên nhiên lại có thể tạo ra những con ong mật "kiến trúc sư" hơn người. Cấu tạo của lỗ tổ ong là một công trình tuyệt diệu của hình học: Ít tốn vật liệu nhất mà lại có thể tích lớn nhất, lại bền vững nhất! Hai góc của hình thoi ghép thành đáy lỗ chỉ sai khác có 2' so với tính toán!

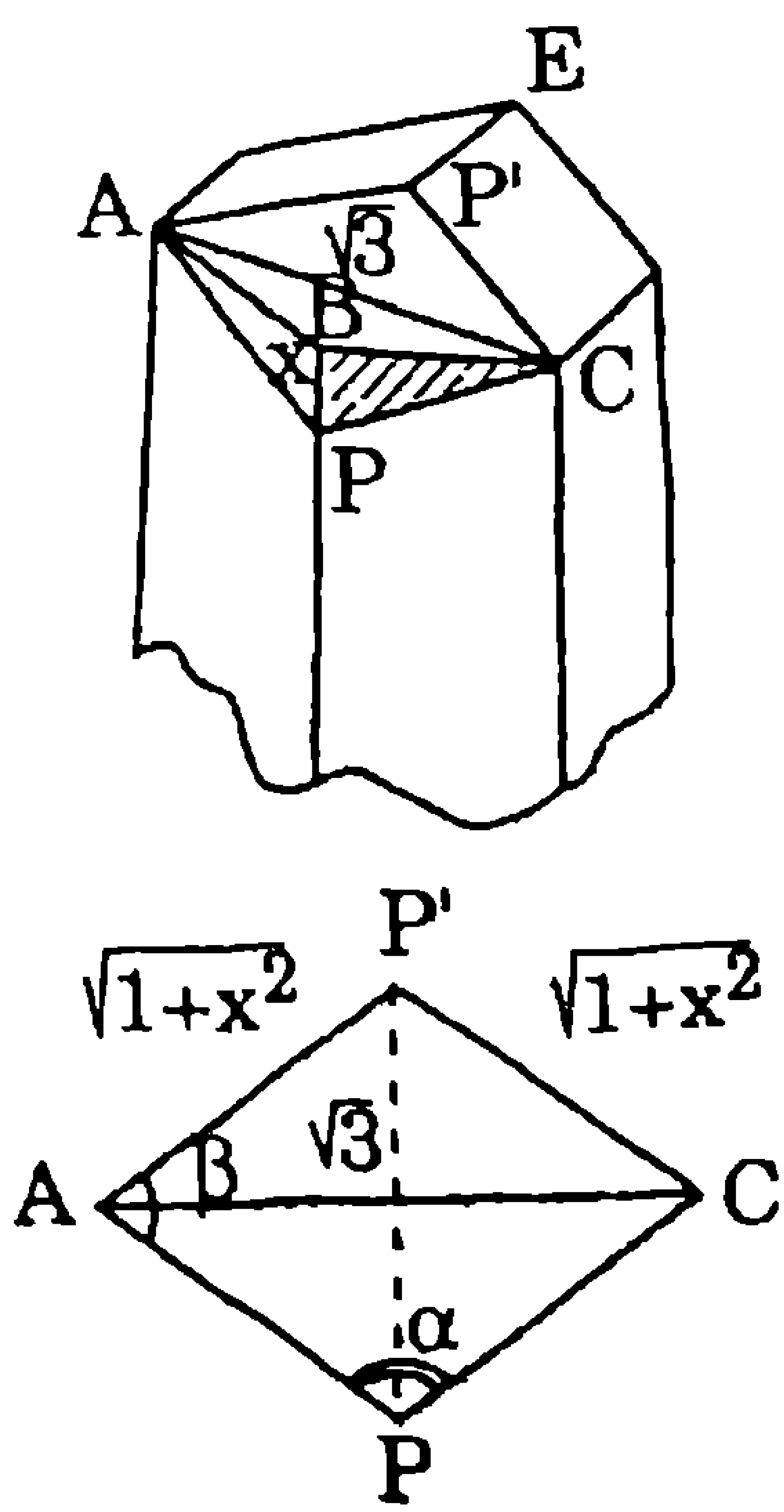
Không ngờ ong mật lại không chịu thua S.Koenig, chúng vẫn kiên trì theo nguyên tắc trong việc xây tổ tổ tiên chúng để lại, xây dựng cho mình những tổ ấm và buộc viện sĩ S.Koenig tiếng tăm lừng lẫy phải thừa nhận sai lầm.

Năm 1743 nhà toán học Colin Maclaurin (2/1698-14/6/1746) người Scotland lại nghiên cứu cấu tạo của lỗ tổ ong. Ông dùng phương pháp mới và tính toán khác với S.Koenig, được hai góc của hình thoi ghép thành đáy như kết quả đo đạc của P.L.M.de Maupertuis: $109^{o}28'$ và $70^{o}32'$. Sau đó, người ta tìm ra sai lầm của S.Koeing là do ông dùng bảng số logarit có một chỗ in sai.

Năm 1744 một việc ngẫu nhiên đã xảy ra: Có một chiếc tàu thuỷ gặp nạn và sau khi người ta điều tra nguyên nhân thì phát hiện ra rằng, khi hoa tiêu xác định góc phương vị đường đi của tàu đã dùng bảng số logarit mà S.Koeing đã dùng!

Cấu tạo tuyệt diệu của tổ ong đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: kiến trúc, hàng không, hàng hải, du hành vũ trụ, vô tuyến điện thoại...

Điều kỳ lạ là, việc tính toán cấu tạo tổ ong phải dùng đến cả toán học cao cấp nhưng từ lúc sinh ra, loài ong mật nhỏ bé đã thực hiện một cách chuẩn mực và người ta phát hiện ra rằng tất cả các tổ ong mật đều cấu tạo như vậy! Đây là điều thật đáng suy nghĩ.



Hình 12-4

Chắc bạn đọc rất muốn biết tính toán của S.Keonig và của C.Maclaurin. Song chúng ta không cần phải lặp lại con đường tính toán cũ đó. Gần hai thế kỷ rưỡi sau đó, người ta đã tìm ra rất nhiều phương pháp tính đơn giản hơn.

Như trên đã nói, việc chứng minh lỗ tổ ong có tiết diện hình lục giác đều là điều không khó nhưng chứng minh phần đáy do ba hình thoi ghép thành thì không dễ. Điều mấu chốt ở đây là diện tích đáy ghép như vậy thì tăng hay giảm so với diện tích đáy phẳng?

Như hình 12-4, giả sử cạnh của hình lục giác đều là 1, chiều cao cắt là x. Rõ ràng là mô hình lỗ tổ ong sau khi cắt lật lên so với hình lục giác đều cũ thì diện tích bề mặt ít hơn 6 diện tích mà mỗi diện tích là hình tam giác vuông nhỏ gạch gạch (S_{tv}) có cạnh góc vuông bằng 1, nhưng lại dôi ra 3 diện tích hình thoi cạnh là $\sqrt{1+x^2}$, đường chéo là $\sqrt{3}$. Như vậy, diện tích 1 hình thoi dễ tính ra là:

$$S_{th} = \sqrt{3} \times \sqrt{(1+x^2) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \sqrt{1+4x^2} \qquad (12\text{-}1)$$

Lượng tăng diện tích bề mặt có thể biểu thị bằng hàm số f(x) của x:

$$f(x) = 3S_{th} - 6S_{tv} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+4x^2} - 3x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (12\text{-}2)$$

Rõ ràng là, nếu làm cho lượng tăng f(x) của diện tích bề mặt nhỏ nhất thì ta được lỗ tổ ong kinh tế nhất. Chúng ta hãy xem một phương pháp tính toán trị số nhỏ nhất của f(x) do học sinh trung học của trường Đại học Nam Kinh (Trung Quốc) tìm ra như sau:

Gọi

$$y = f(x) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{12-3}$$

từ (12-3) và (12-2), ta có:

$$y + 3x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{1 + 4x^2} \tag{12-4}$$

Bình phương hai vế (12-4) và biến đổi, ta có:

$$x^2 - \left(\frac{1}{3}y\right)x + \left(\frac{3}{8} - \frac{y^2}{18}\right) = 0 \tag{12-5}$$

Do x phải là số thực nên từ (12-4) và (12-5) ta được bất đẳng thức bậc 2 của y:

$$\frac{1}{9}y^2 - 4 \times \left(\frac{3}{8} - \frac{y^2}{18}\right) \geq 0$$

hoặc: $$\frac{1}{3}y^2 - \frac{3}{2} \geq 0$$

Vậy: $y \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, tức là:

$$y_{min} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \tag{12-6}$$

Thay (12-6) vào (12-4), ta tìm được:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{4} \tag{12-7}$$

Từ (12-7), ta tính được cạnh hình thoi là:

$$\sqrt{1 + x^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Lợi dụng định nghĩa hàm số lượng giác ta có thể tính ra góc tù α và góc nhọn β của hình thoi như sau:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,8165$$

Tra ngược lại bảng hàm số sin, ta được:

$$\frac{\alpha}{2} = 54^\circ 44'$$

Vậy $\alpha = 109^\circ 28'$

$\beta = 70^\circ 32'$

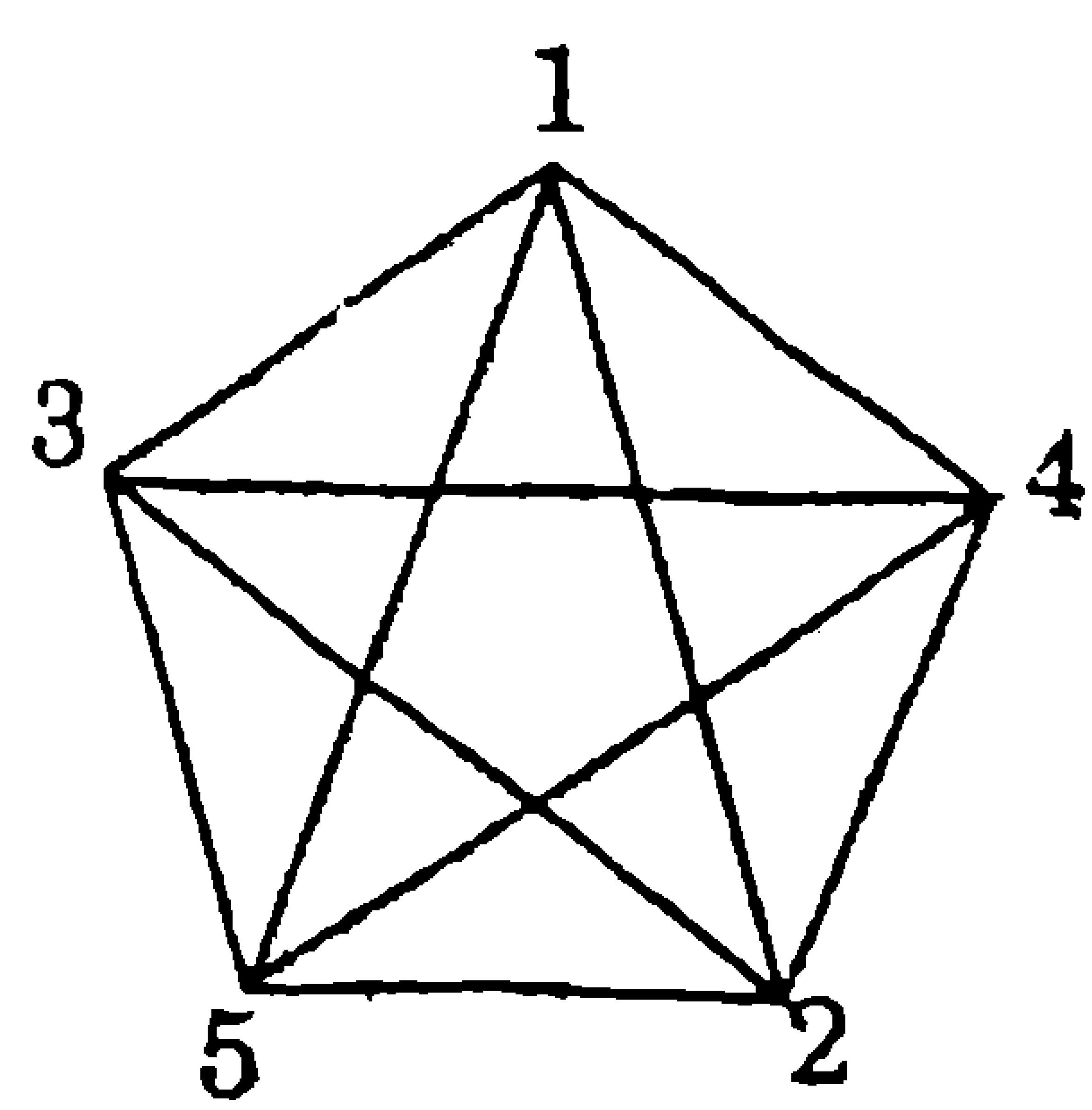
Đây chính là chân lý mà ong mật đã làm rõ.

13. KHOA HỌC CỦA GẤP GIẤY

Ngôi sao 5 cánh được nhiều người thích. Nhiều nước đã dùng ngôi sao 5 cánh làm biểu tượng trên lá cờ Tổ quốc, như Việt Nam, Trung Quốc, Liên Xô trước đây, Mỹ,...

Người Hy Lạp cổ đại cũng rất thích sao 5 cánh. Hình 13-1 là biểu tượng đặc trưng của trường phái Pythagoras. Đó là ngôi sao 5 cánh nội tiếp trong hình 5 cạnh đều (ngũ giác đều). Điều lý thú của hình này là các đường chéo của hình 5 cạnh đều (tạo nên ngôi sao 5 cánh) cắt nhau lại tạo ra một hình 5 cạnh đều khác nhỏ hơn theo hướng ngược lại. Nếu lại kẻ các đường chéo của hình 5 cạnh đều nhỏ đó thì một hình 5 cạnh đều mới nhỏ hơn nữa lại được sinh ra và tiếp tục như thế mãi.

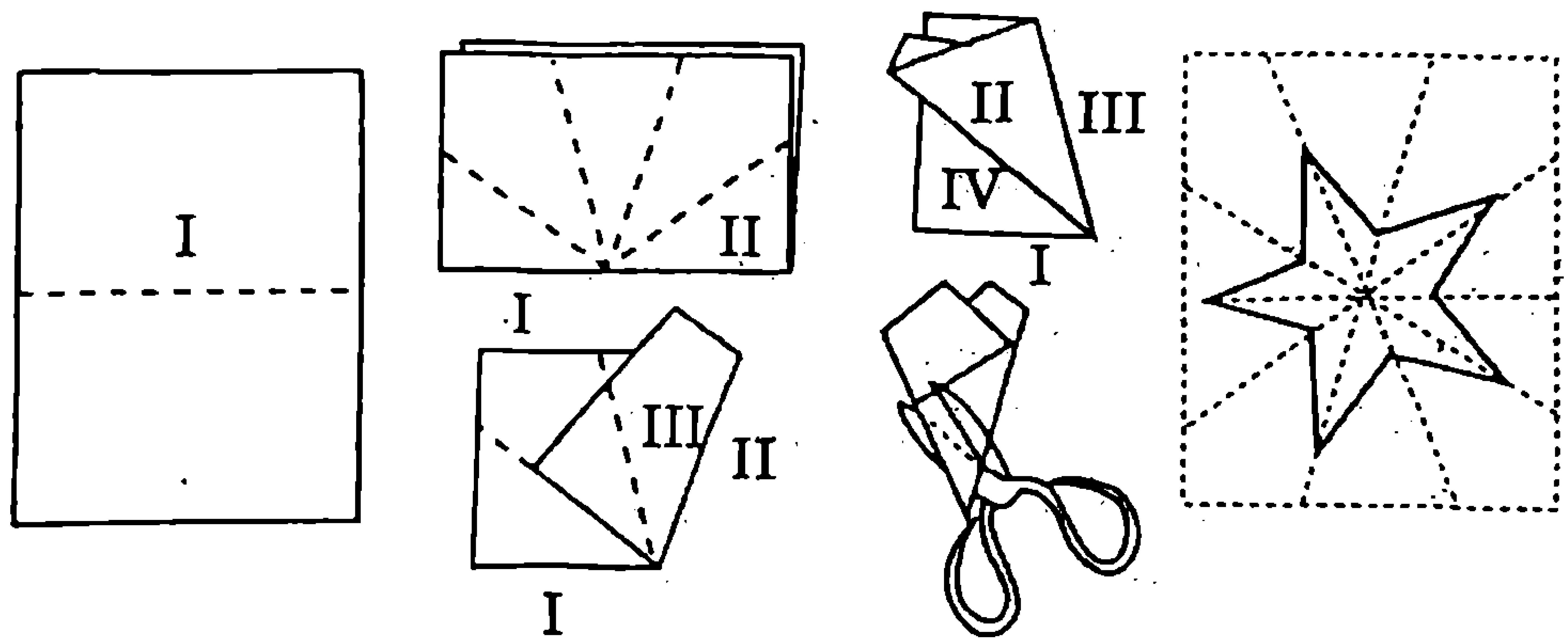
Hình 5 cạnh đều và ngôi sao 5 cánh được tạo thành từ các đường chéo của hình 5 cạnh đều có một số tính chất kỳ lạ mà các môn đệ của Pythagoras tin rằng đó là điều huyền bí. Mỗi đường chéo chia đường chéo khác thành hai phần không bằng nhau. Tỷ số giữa một đường chéo với đoạn dài hơn đúng bằng tỷ số giữa đoạn dài hơn với đoạn ngắn hơn. Tỷ số này là như nhau đối với tất cả các đường chéo nhỏ nữa. Người ta gọi đó là "Tỷ số vàng", đã được đề cập ở cuốn *Những câu chuyện lý thú về phương trình* và cuốn *Những câu chuyện lý thú về giới hạn*.



Hình 13-1

Các số thứ tự trong hình 13-1 và các đường lập thể giống như các cầu giao nhau khiến người ta cảm thấy một sự chuyển động vô cùng, chu kỳ là 5, tuần hoàn mãi.

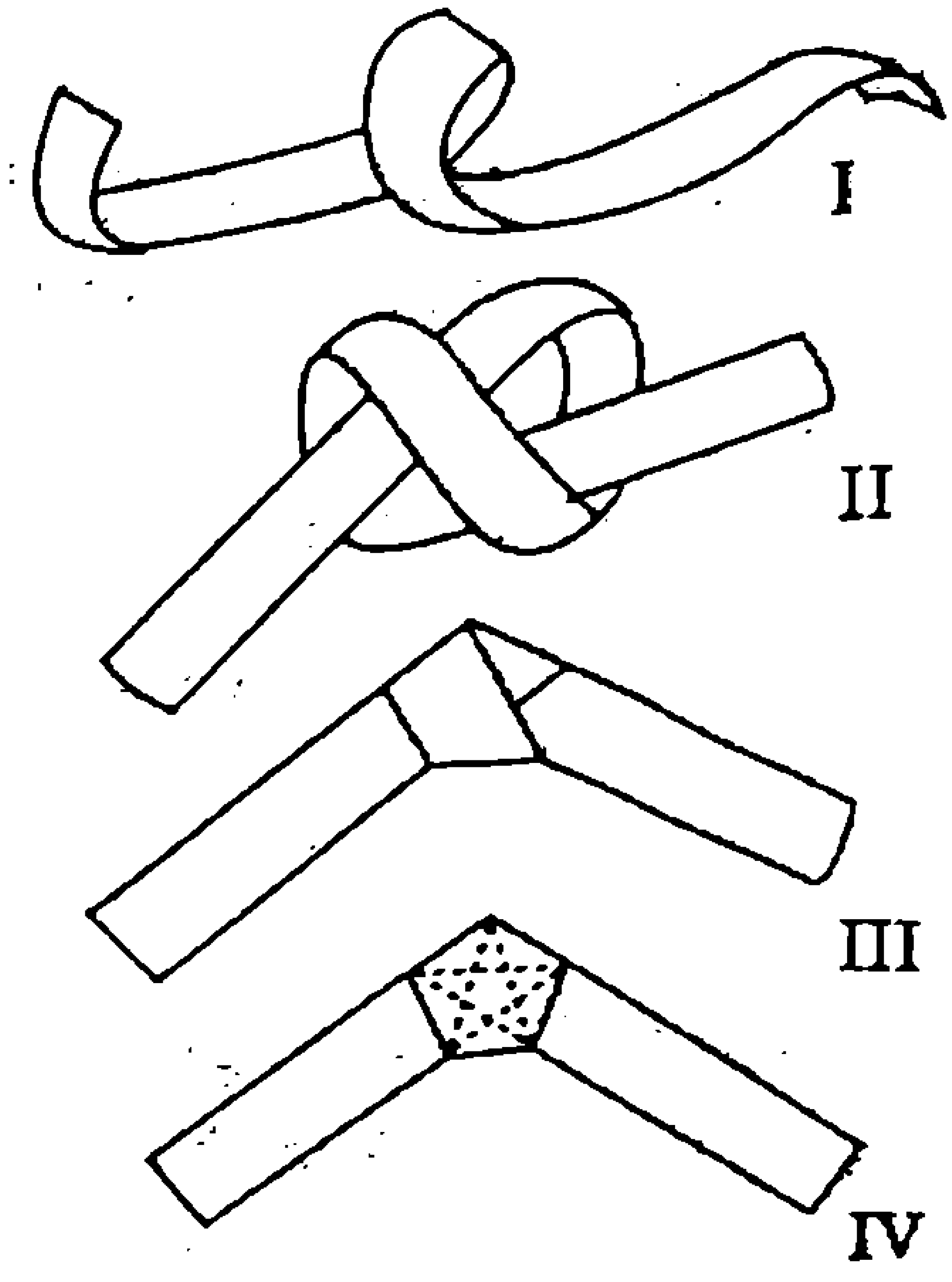
Có lẽ nhiều bạn đọc trong thời thơ ấu đã học được cách gấp giấy để cắt sao 5 cánh. Hình 13-2 thể hiện trực quan cách gấp này. Số La Mã trong hình biểu thị thứ tự vết gấp. Về nguyên lý gấp sao 5 cánh, bạn đọc nhìn hình 13-2 sẽ rõ. Nhát cắt cuối cùng tựa hồ có tính tuỳ tiện, do đó nghiêm túc mà nói thì hình cắt ra chỉ là "hình sao 5 cánh", mà chưa chắc đã là hình sao 5 cánh đều.



Hình 13-2

Nghệ thuật gấp giấy, tưởng như đơn giản nhưng bên trong thường bao hàm ý nghĩa khoa học sâu sắc. Phương pháp gấp giấy cũng không chỉ có một. Lấy việc gấp sao 5 cánh đều mà nói, mọi người hoàn toàn không cần dùng thứ tự các bước gấp phức tạp như trên. Thực tế chỉ cần thắt một nút bình thường là đủ!

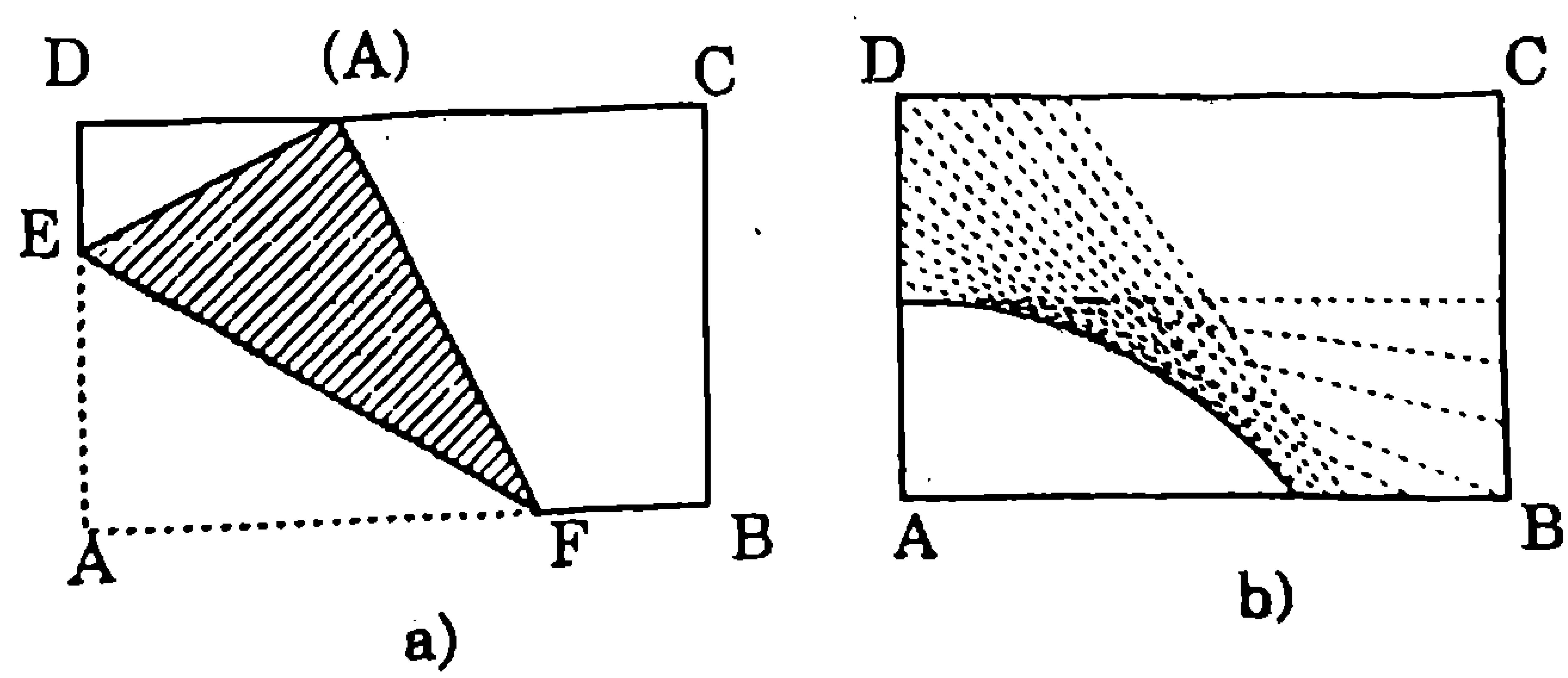
I, II, III ở hình 13-3 biểu thị một cách hình tượng quá trình thắt nút. Dụng cụ được dùng chỉ là một dải giấy dày. Có thể khẳng định là, trước đấy, không hề có người nào biết các động tác thắt nút quen mắt thường ngày của chúng ta, trên thực tế đang sáng tạo ra từng ngôi sao 5 cánh đẹp đẽ. Hình IV ở 13-3 là hình III khi chiếu lên ánh sáng làm cho người ta có thể nhìn thấy hình sao 5 cánh bên trong. Bạn đọc nếu có thể thì tự mình thử một chút, nhất định sẽ cảm thấy cảnh kỳ lạ này của thiên nhiên tặng cho.



Hình 13-3

Có thể trong số bạn đọc có người cho rằng, gấp giấy chỉ có gấp được hình có đường thẳng, bởi vì vết gấp dù thế nào cũng chỉ là thẳng. Kỳ thực, khi những vết gấp thẳng đủ nhiều, có lúc cũng có thể tạo ra được đường cong đẹp đẽ.

Bạn hãy cắt một tờ giấy thành hình chữ nhật ABCD, gấp lại như hình 13-4a, làm sao để sau mỗi lần gấp điểm A đều ở trên cạnh CD. Vô số các vết gấp sẽ uốn ra được một đường cong như ở hình 13-4b. Đường cong như vậy trong hình học gọi là Paolo (sợi quấn) của vết gấp. Đường Paolo ở hình 13-4b là một phần của đường parabol.

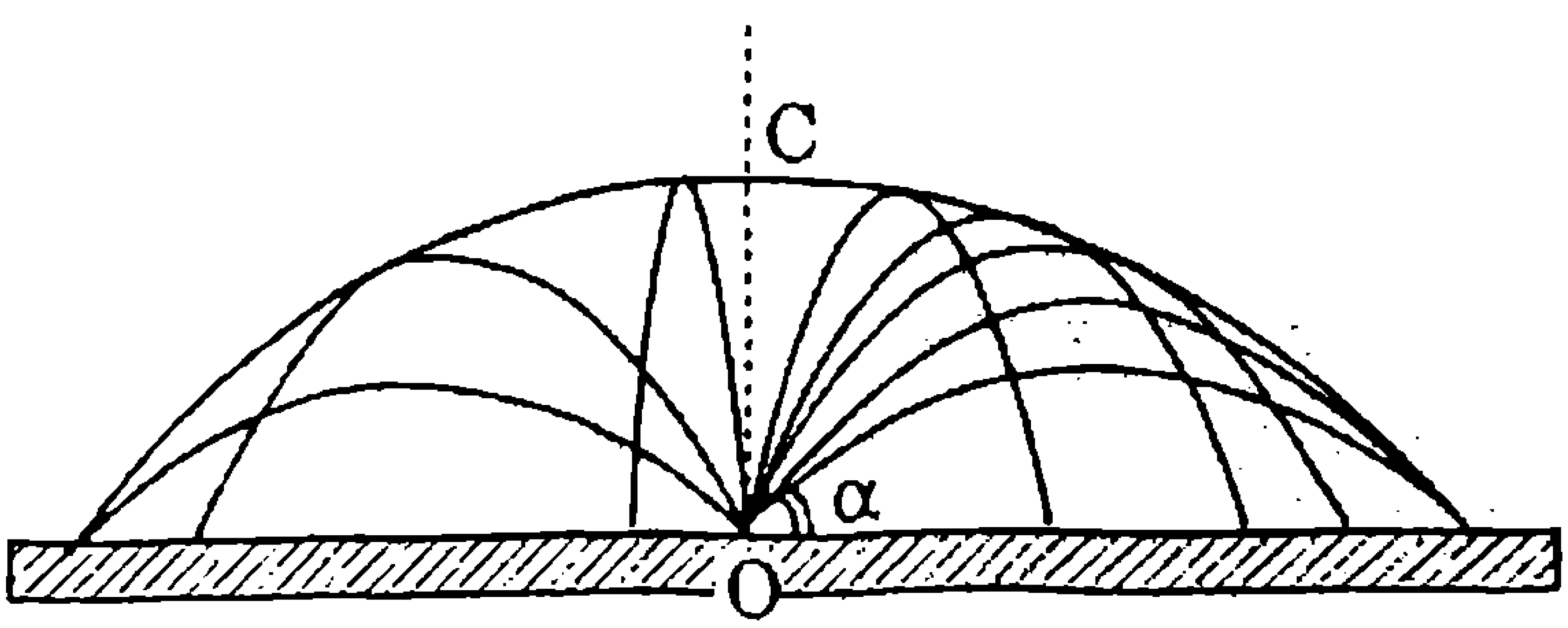


Hình 13-4

Khi bạn ném đá, bạn sẽ nhìn thấy đá vẽ trên không một đường cong đẹp. Đường cong này là kết quả của hòn đá đồng thời chịu hai tác dụng: lực hút của tâm Trái Đất và chuyển động quán tính. Giả sử khi bạn ném đá tạo với đường nằm ngang một góc α và tốc độ rời khỏi tay là v_0 thì ở thời điểm t, tọa độ vị trí (x, y) của chuyển động của đá là:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad (13\text{-}1)$$

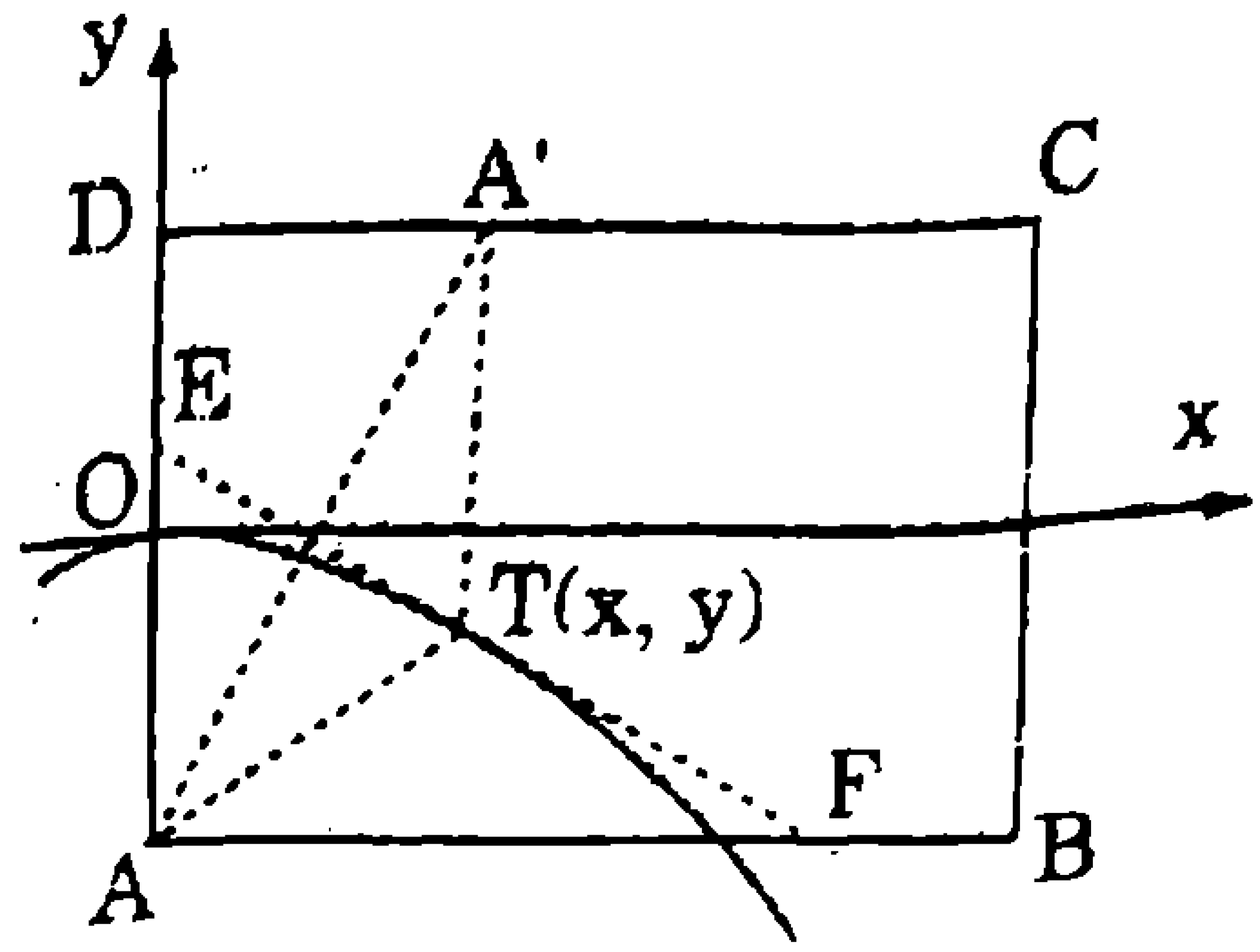
Sau khi bỏ thời gian t, từ (13-1) ta được một hàm số bậc 2 của x. Vì thế, đồ thị bậc 2 cũng gọi là đường parabol. Điều thú vị là, khi tốc độ ban đầu v_0 không đổi, chỉ thay đổi góc ném α, sẽ được hàng loạt các đường parabol như ở hình 13-5, vô số Paolo của đường parabol này cũng hình thành một đường parabol, trong vật lý thường gọi là đường parabol an toàn. Nếu bạn đọc có dịp thưởng thức màn nước đẹp phun ra từ đài phun nước thì bạn sẽ hiểu được hình dạng đặc biệt của đường Paolo trong tưởng tượng.



Hình 13-5

Chúng ta hãy trở lại vấn đề gấp giấy, nghiên cứu một chút vì sao đường Paolo là một phần của đường parabol?

Lấy điểm giữa O của AD làm gốc (hình 13-6), lấy OD làm trục y dương, lập hệ tọa độ vuông góc xOy. Gọi AD = p thì tọa độ của điểm A là $\left(0; -\frac{p}{2}\right)$. Đặt A' là một điểm bất kỳ trên DC, EF là vết gấp trên giấy khi A gấp về A'; T trên EF thoả mãn TA' ⊥ DC.



Hình 13-6

Sau đây chúng ta sẽ chứng minh quỹ tích của điểm T, tức là đường Paolo của vết gấp. Sự thực tọa độ của điểm T là (x, y), ta có:

$$TA' = \left(\frac{p}{2} - y\right)$$

$$TA = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \quad (13\text{-}2)$$

$$TA' = TA$$

Từ (13-2), ta có:

$$\left(\frac{p}{2} - y\right)^2 = x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \quad (13\text{-}3)$$

Biến đổi (13-3), ta được:

$$y = -\frac{1}{2p}x^2 \quad (13\text{-}4)$$

Từ (13-4) ta thấy, quỹ tích của điểm T (x, y) là một phần của đường parabol. Vấn đề còn lại là phải chứng minh nó nhận đường vết gấp là tiếp tuyến.

Gọi độ nghiêng của đường thẳng AA' là k:

$$k = \frac{p}{x_{A'}} \tag{13-5}$$

Chú ý đến vết gấp EF là đường trung trực của đoạn thẳng AA', dễ dàng tìm được phương trình của đường thẳng EF:

$$y = -\frac{x_{A'}}{p}\left(x - \frac{x_{A'}}{2}\right) \tag{13-6}$$

Từ (13-6) và (13-4), ta được:

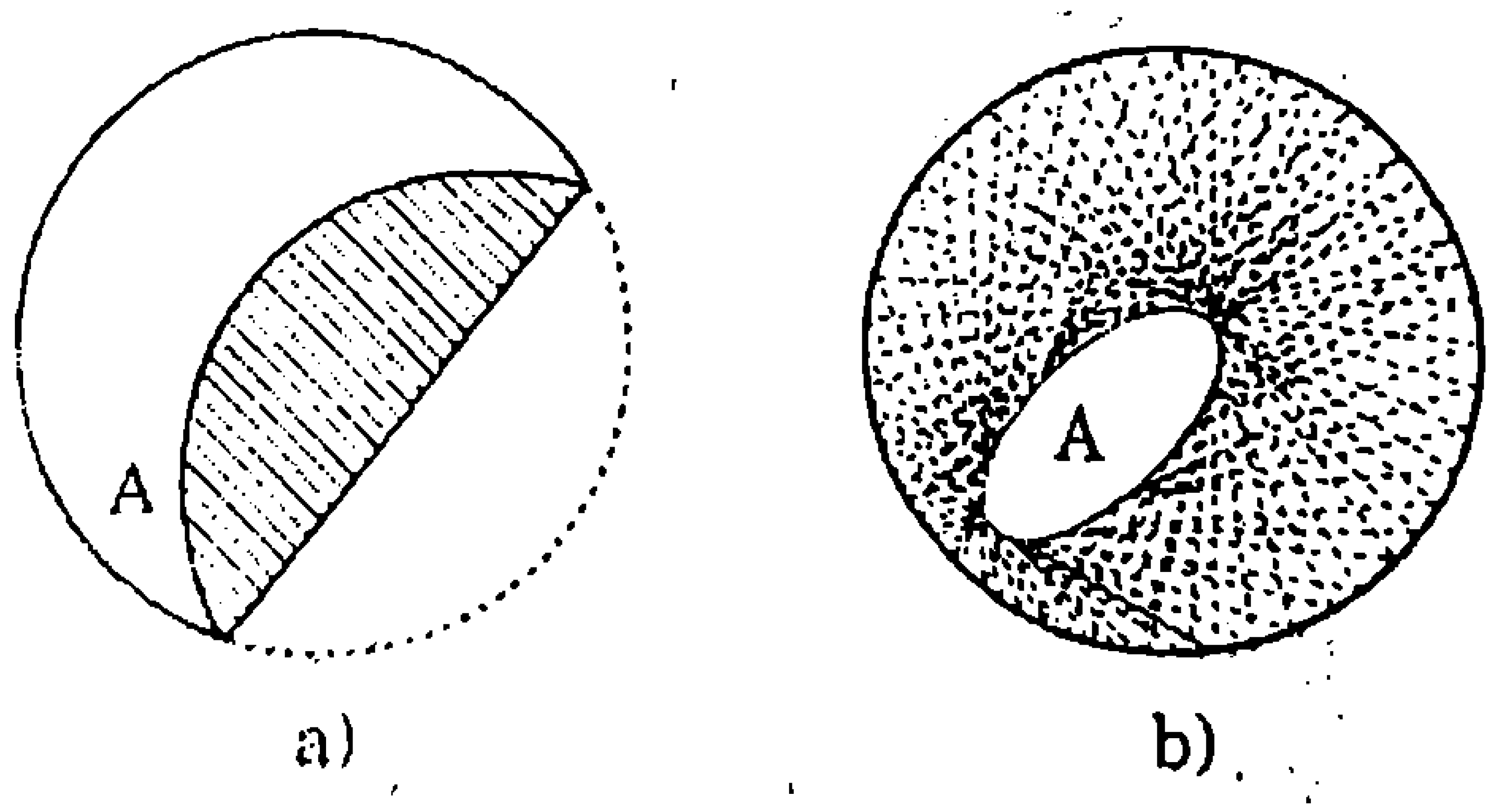
$$x^2 - 2xx_{A'} + (x_{A'})^2 = 0 \tag{13-7}$$

Vậy: $\Delta = 4(x_{A'})^2 - 4(x_{A'})^2 = 0$,

chứng tỏ đường thẳng EF tiếp tuyến với đường (13-4), tức là đường parabol đã tìm đúng là đường Paolo của vết gấp.

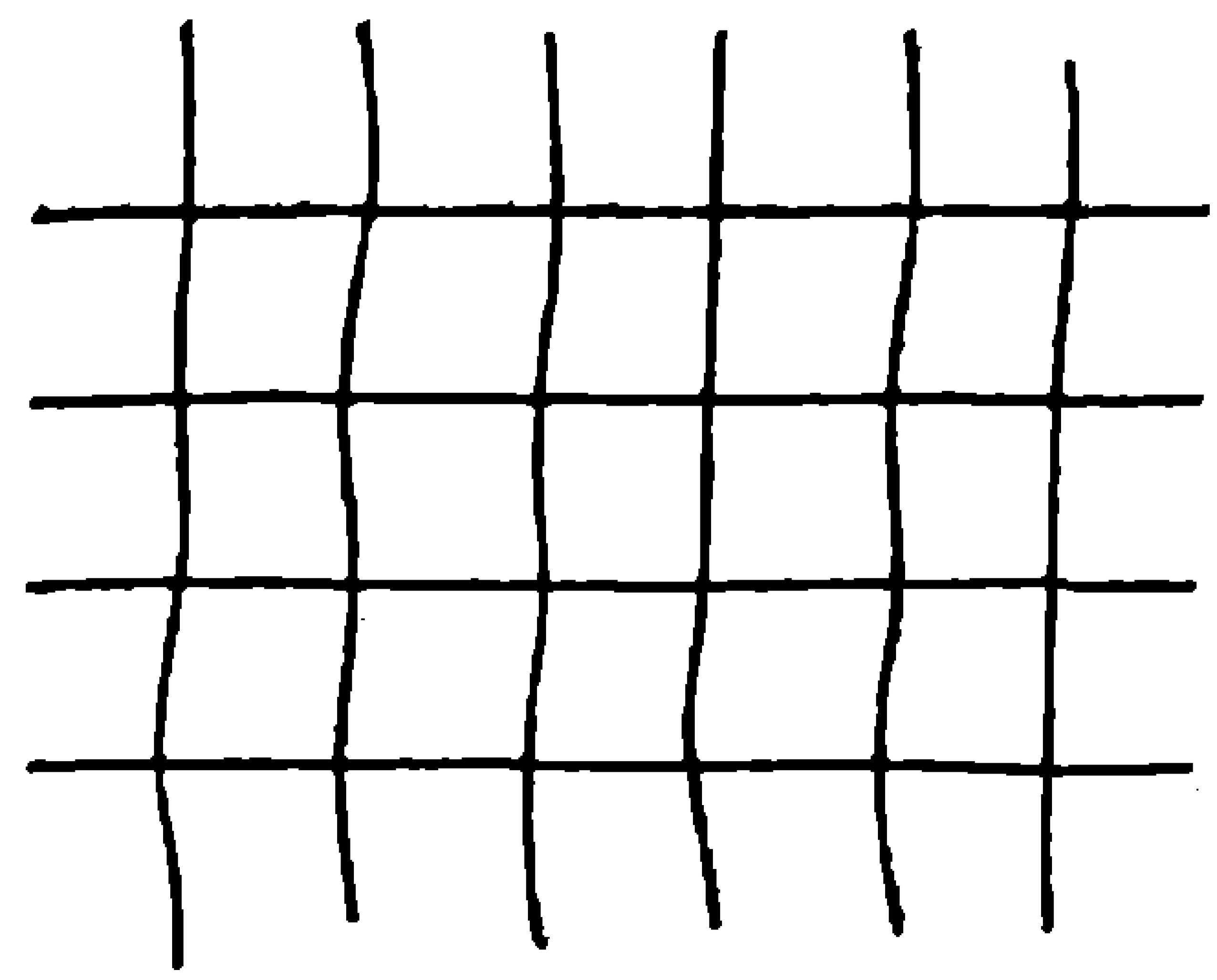
Paolo là một trong những đề tài nghiên cứu hình học vi phân sáng tạo đầu tiên của nhà toán học C.F.Gauss.

Sau đây lại là một loại Paolo gấp giấy thú vị khác. Cắt một mảnh giấy hình tròn, lấy một điểm A bất kỳ trong mảnh giấy đó, sau đó gấp miếng giấy như ở hình 13-7a, làm sao để cung tròn sau khi gấp thì đi qua điểm A. Cứ như vậy được vô số vết gấp như ở hình 13-7b. Paolo của những vết gấp này là một hình elip lấy điểm A của tâm vòng tròn làm tiêu điểm, bán kính làm trục dài. Bạn đọc có thể tự gấp thử.



Hình 13-7

Gấp giấy tài tình nhất có lẽ không qua nổi "phép gấp Tam Phố", do giáo sư Tam Phố Công Lượng ở Viện Nghiên cứu khoa học vũ trụ Nhật Bản phát minh. Phép gấp giấy này lại có thể làm cho tờ giấy vô tri có chức năng "ghi nhớ".

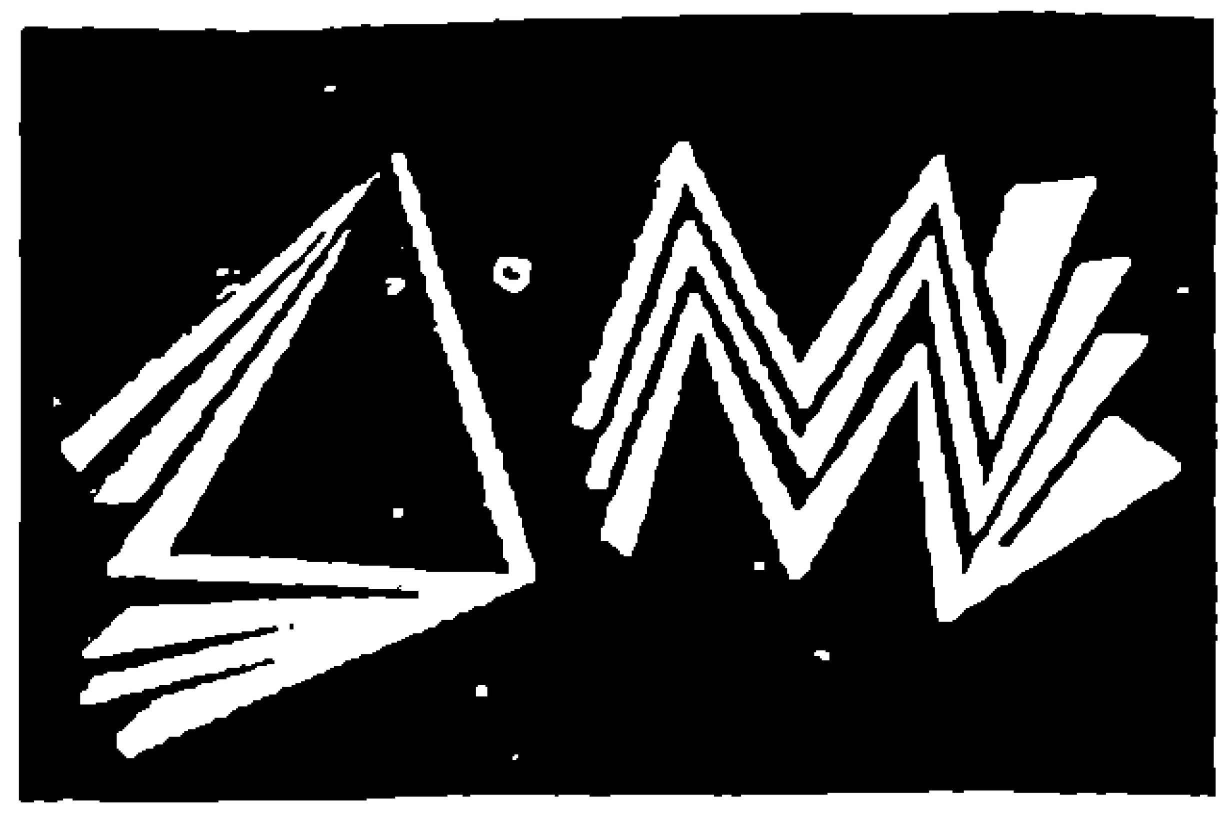


Hình 13-8

Mọi người đều biết, khi chúng ta muốn gấp một tờ giấy to thành nhỏ, cách mà chúng ta thường dùng là gấp vuông góc với nhau. Vết gấp của cách gấp này là "núi" hay "khe" hoàn toàn độc lập với nhau. Từ đó, các loại khả năng tổ hợp cách gấp có tổng số rất lớn. Khi một tờ giấy lớn đã gấp xong mở ra hoàn toàn, rất khó để nó gấp trở về vị trí cũ. Ngoài ra, cách gấp vuông góc với nhau này, khe gấp thường chồng lên rất dày, do đó dưới tác dụng của lực căng, khó tránh khỏi hỏng.

"Phép gấp Tam Phố", còn gọi là "mặt cong có thể khai triển hình sóng hai lớp", chỗ khác với "cách gấp vuông góc với nhau" là khe gấp dọc hơi có hình răng cưa (xem hình 13-8). Như vậy, khi bạn mở tờ giấy gấp theo "phép gấp Tam Phố" ra, bạn sẽ phát hiện được điều lý thú: Chỉ cần nắm lấy bộ phận góc đối kéo ra theo hướng bất kỳ nào đó, tờ giấy sẽ tự động mở ra theo đồng thời cả hai hướng dọc - ngang. Cũng vậy, nếu muốn gấp tờ giấy như thế, chỉ cần ép một phía bất kỳ, giấy sẽ trở về nguyên trạng, giống như giấy "nhớ" lại dạng cũ.

Dùng "phép gấp Tam Phố" để gấp giấy, cả tờ giấy trở thành một thể liên kết hữu cơ. Tổ hợp khe gấp của nó, chỉ có hai loại: mở toàn bộ hoặc gấp lại toàn bộ. Do đó, không thể vì gấp mà khe gấp không gấp đúng như cũ. Hình 13-9 là cảnh khi gấp bằng "Phép gấp Tam Phố". Dễ nhận ra là, các khe gấp ở đây lệch nhau. Hình 13-9a là cách gấp thông thường không khó phát hiện: khe gấp ở chỗ trùng lặp sẽ xuất hiện gồ lên nguy hiểm.



a) b)

Hình 13-9

Ngày nay "phép gấp Tam Phố" tài tình đã được ứng dụng rộng rãi. Người ta có thể tạo ra loại "buồm Mặt Trời" diện tích lớn, Mặt Trăng nhân tạo...

14. TÍNH TOÁN BẰNG ĐỒ THỊ

Dùng đồ thị tính toán sớm nhất có lẽ phải kể đến thời kỳ những năm 1630. Việc thiết lập hệ tọa độ Descartes đã khiến ta có thể thông qua sự biến đổi để vẽ được đồ thị của hàm số, từ đó tính được các giá trị của hàm số.

Việc tính toán bằng đồ thị do nhà toán học Gaspard Monge (10/5/1753 - 28/7/1818) người Pháp đặt nền móng từ môn hình học họa hình.

Tài năng của G.Monge xuất hiện rõ từ một sự kiện ngẫu nhiên. Trong một lần thực tập thiết kế môn xây thành ở Học viện Quân sự Meciaire của Pháp, trong lúc nhiều người thực tập đang rất buồn vì phải tính toán lộn xộn và lặp lại thì G. Monge lại dùng phương pháp lập đồ thị riêng của mình thay cho những tính toán phức tạp, nhẹ nhàng thu được kết quả. Việc này đã làm viên sĩ quan chủ trì môn xây thành rất đỗi ngạc nhiên. Từ đó, người ta chú ý đến phương pháp mà G.Monge đã sử dụng. Về sau phương pháp này phát triển thành môn hình học họa hình.

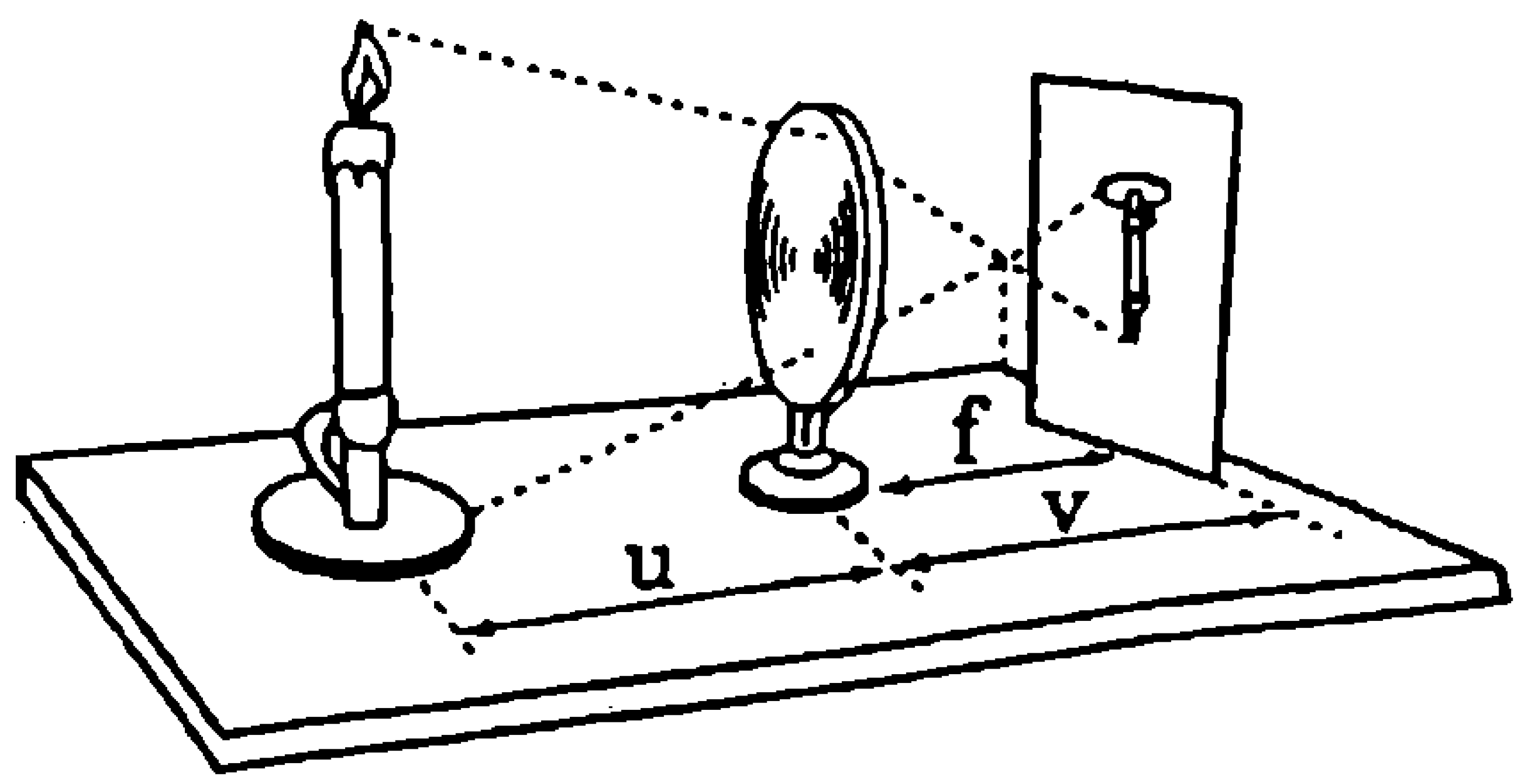
G.Monge

Nhờ phát minh này mà năm 22 tuổi G.Monge đã trở thành giáo sư trẻ nhất của Học viện Quân sự Meciaire.

Ngoài việc đặt nền móng cho môn hình học họa hình, G.Monge còn phát minh ra phương pháp tính toán bằng đồ thị.

Cuốn sách "Đại số hình vẽ" xuất bản năm 1795 là tác phẩm đại diện về tính toán bằng đồ thị.

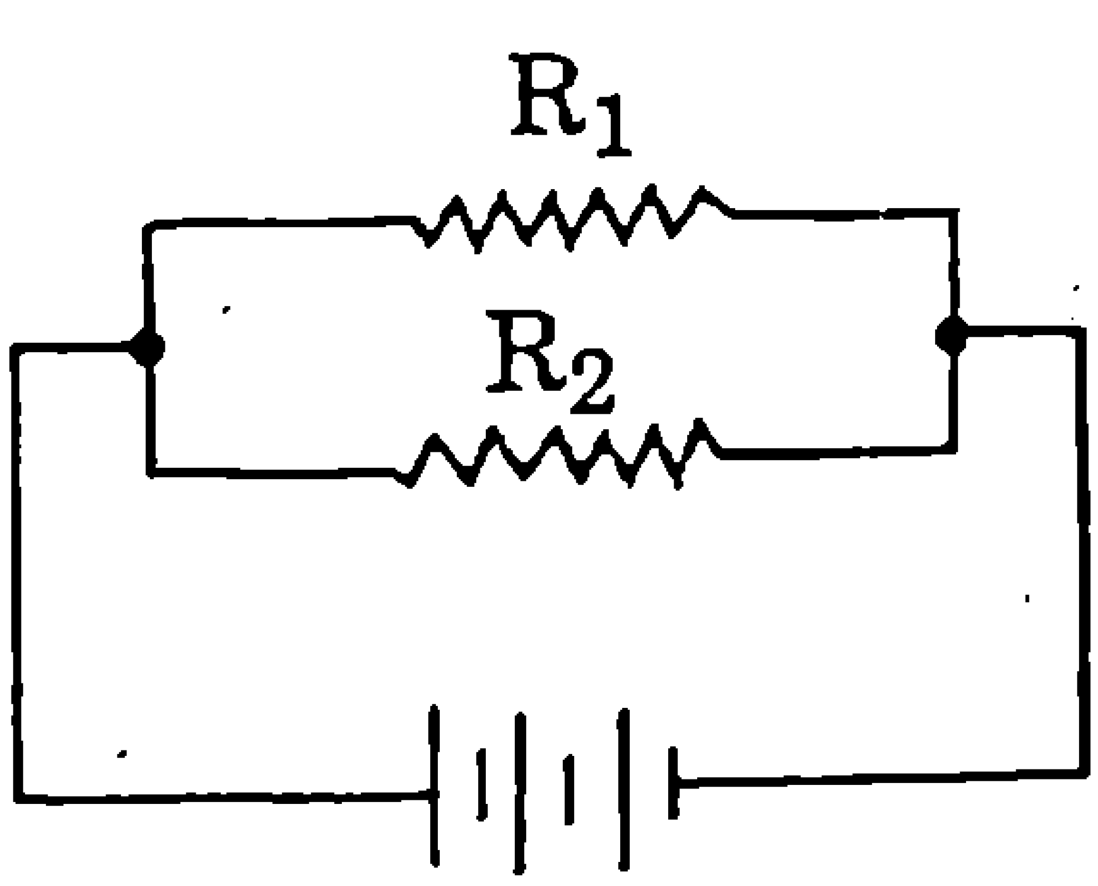
Vậy thế nào là tính toán bằng đồ thị? Thế nào là đồ thị tính toán? Muốn làm rõ những điều này, trước tiên phải nói từ tính tương tự của tự nhiên.



Hình 14-1

Hẳn bạn đọc đã nắm vững quy luật thấu kính thành ảnh. Hình 14-1 là sơ đồ biểu thị một cây nến qua thấu kính lồi thì hình ảnh của nó sẽ thành hình ảnh ngược lại và kích thước tuỳ thuộc vào tiêu cự f của thấu kính, vị trí đặt thấu kính: u - khoảng cách đến vật; v - khoảng cách đến ảnh. Giữa các đại lượng biến đổi này có quan hệ:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \qquad (14\text{-}1)$$



Hình 14-2

Bạn đọc sẽ phát hiện thấy một cách kỳ lạ là một số biểu thức điện học tương tự (14-1), chẳng hạn hai điện trở có trị số điện trở là R_1 và R_2 mắc song song với nhau, điện trở chung R (hình 14-2) thoả mãn:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R} \quad (14\text{-}2)$$

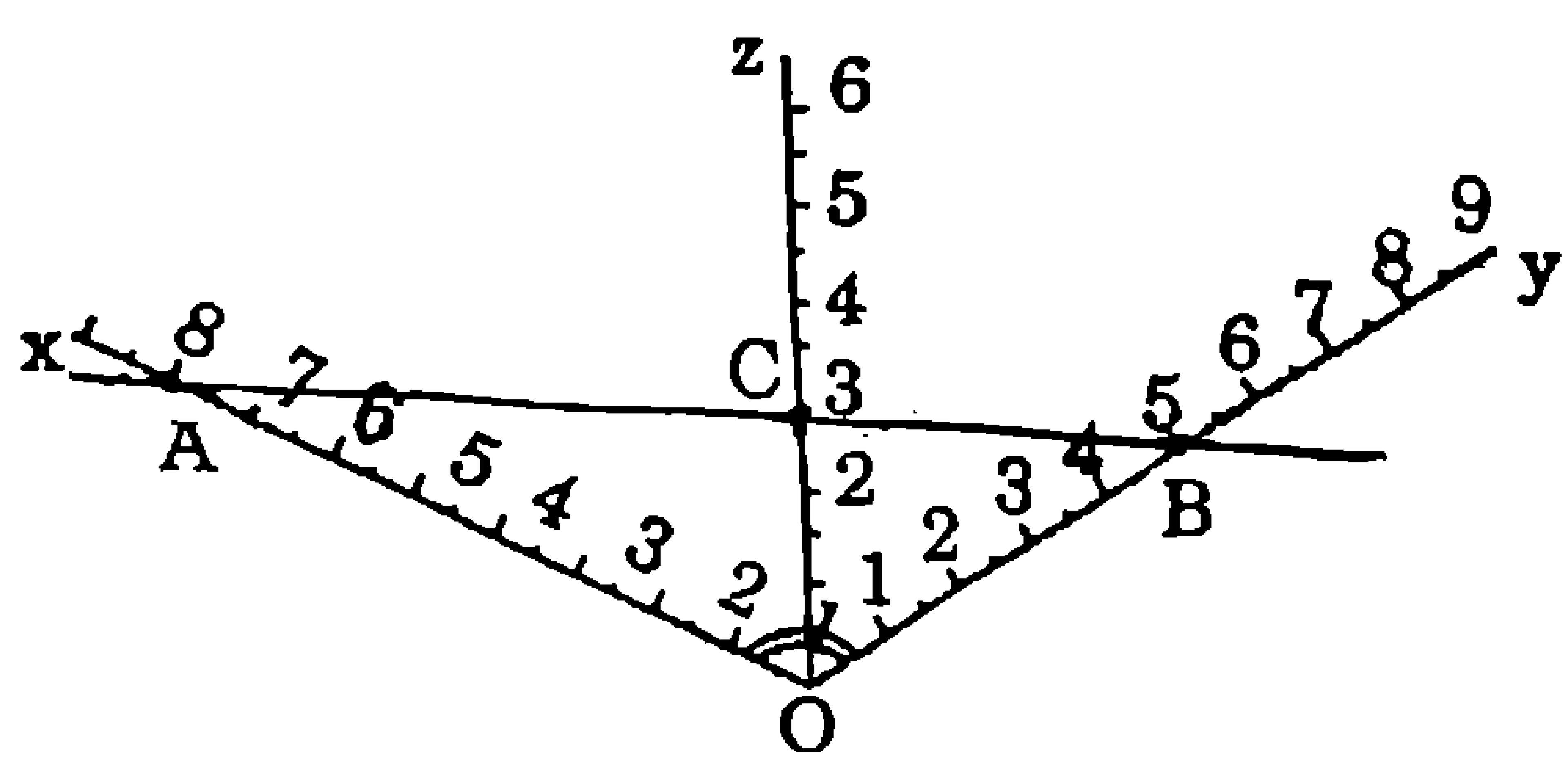
Những biểu thức tương tự (14-1) thậm chí còn xuất hiện trong một số tính toán thực dụng.

Chẳng hạn nếu muốn hoàn thành một công việc thì đội A phải làm mất x ngày, nếu chỉ đội B thì mất y ngày, nhưng cả hai đội A và B cùng làm thì phải mất mấy ngày? Dễ dàng ta có quan hệ:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \quad (14\text{-}3)$$

trong đó z - số ngày mà hai đội A và B cùng làm việc đó.

Giữa các hiện tượng rất khác nhau đó lại có sự giống nhau về biểu thức toán học. Do vậy, ta có các tính toán tương tự như nhau. Tính toán bằng đồ thị chính là sản phẩm phát sinh trong ngữ cảnh này. Trong phương pháp tính toán này đồ thị tính toán là công cụ đặc biệt.



Hình 14-3

Sau đây là một đồ thị tính toán khá tinh xảo:

Ba nửa đường thẳng Ox, Oy và Oz xuất phát từ O (hình 14-3), thoả mãn điều kiện:

$$\widehat{xOz} = \widehat{zOy} = 60^\circ$$

Trên Ox, Oy và Oz cùng chia theo một đơn vị chiều dài. Đây chính là một đồ thị tính toán, nó có thể tính toán theo (14-1). Khi sử dụng chỉ cần dùng một thước thẳng nối điểm A có độ chia là u (khoảng cách đến vật) trên Ox với điểm C có độ chia là f (tiêu cự) trên Oz thành một đường thẳng. Đường thẳng này cắt Oy ở B và độ chia của nó chính là khoảng cách v đến ảnh cần tìm.

Nguyên lý tính toán bằng đồ thị ở hình 14-3 như sau:

Xét diện tích các tam giác AOC, COB và AOB:

$$\begin{cases} S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2}uf\sin 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}uf \\ S_{\Delta COB} = \dfrac{1}{2}vf\sin 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}vf \\ S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}uv\sin 120^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}uv \end{cases} \qquad (14\text{-}4)$$

Từ hình 14-3, ta có:

$$S_{\Delta AOC} + S_{\Delta COB} = S_{\Delta AOB} \qquad (14\text{-}5)$$

Từ (14-5) và (14-4), ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}uf + \frac{\sqrt{3}}{4}vf = \frac{\sqrt{3}}{4}uv$$

tức là ta được (14-1).

Điều này có nghĩa là độ chia u, v và f của ba thước trong đồ thị tính toán thoả mãn công thức thấu kính.

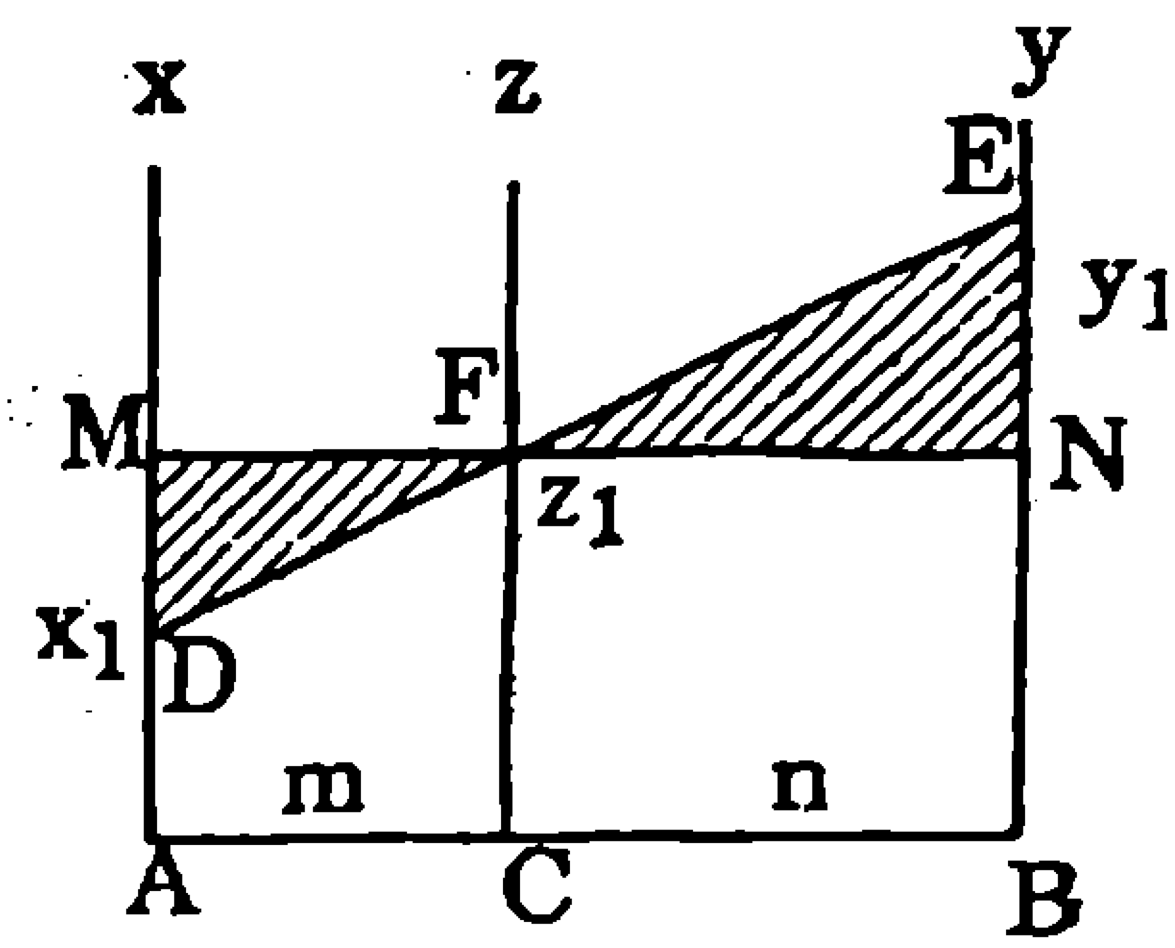
Khi cấu tạo đồ thị tính toán, thước logarit là rất hữu dụng. Vậy thước logarit là gì?

Thực chất khi chúng ta sử dụng đồ thị tính toán theo hình 14-3 là đã áp dụng

$$z = x^a y^b \tag{14-6}$$

trong đó a = b = 1.

Giả sử chúng ta dùng hai thước logarit đặt song song làm thước x và y (hình 14-4). Chúng ta hãy xem thước z đặt song song với hai thước x và y khắc độ thế nào?



Hình 14-4

Gọi AC = m, CB = n, CF = f(z_1). Từ hai tam giác đồng dạng NFE và MFD, ta có:

$$\frac{NF}{MF} = \frac{EN}{DM} \tag{14-7}$$

Ta lại có: AD = $\lg x_1$ và BE = $\lg y_1$.

Thay các ký hiệu vào (14-7), ta được:

$$\frac{n}{m} = \frac{BE - CF}{CF - AD} = \frac{\lg y_1 - \varphi(z_1)}{\varphi(z_1) - \lg x_1} \tag{14-8}$$

Giải (14-8), ta được:

$$\varphi(z_1) = \frac{n}{m+n}\lg x_1 + \frac{m}{m+n}\lg y_1 \tag{14-9}$$

Gọi:

$$\begin{cases} a = k\dfrac{n}{m+n} \\ b = k\dfrac{m}{m+n} \end{cases} \tag{14-10}$$

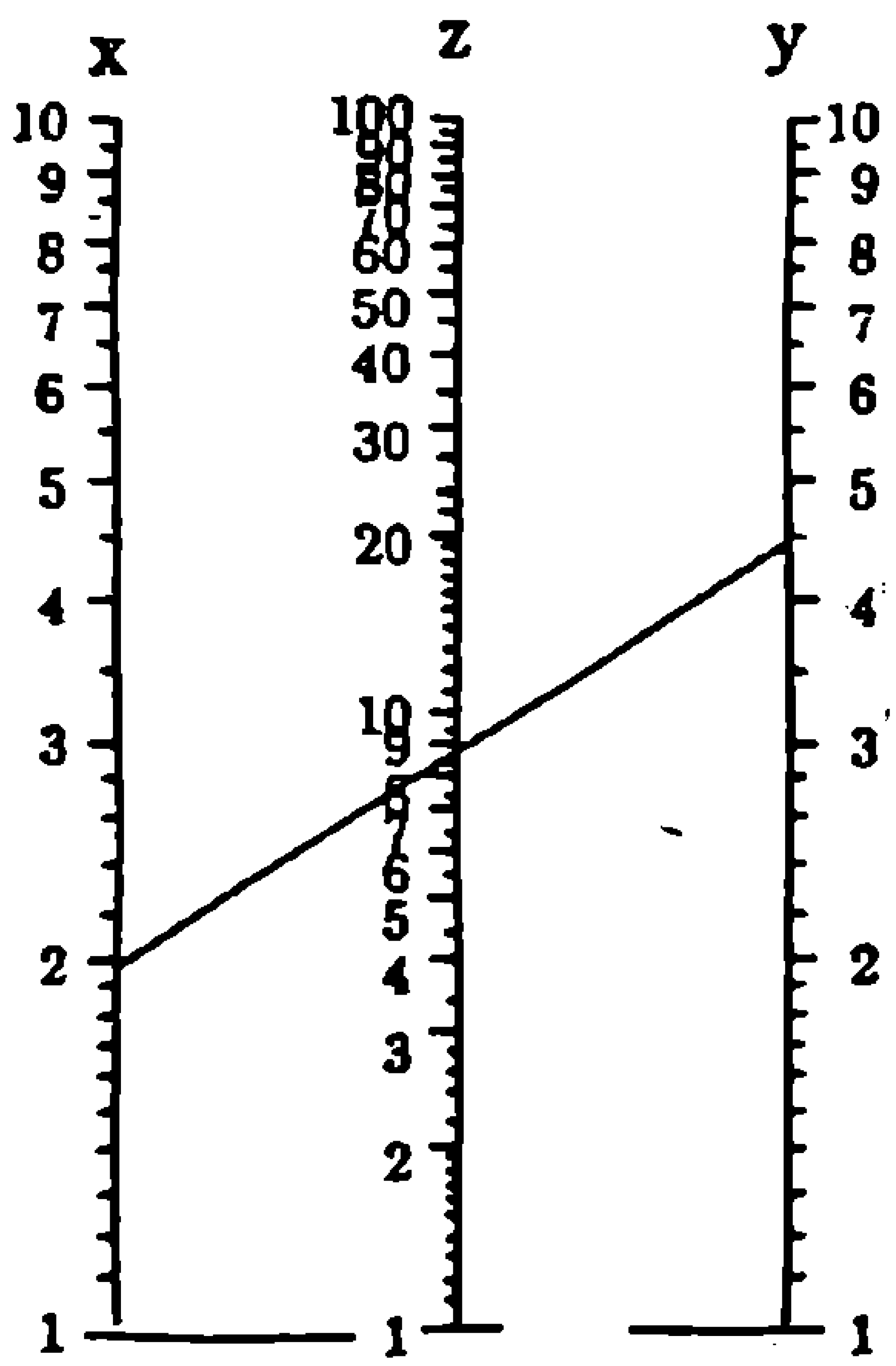
Từ (14-10) và (14-9), ta có:

$$\varphi(z_1)=\frac{1}{k}(a\lg x_1+b\lg y_1)=\frac{1}{k}\lg x_1^a\times y_1^b=\frac{1}{k}\lg z_1 \qquad (14\text{-}11)$$

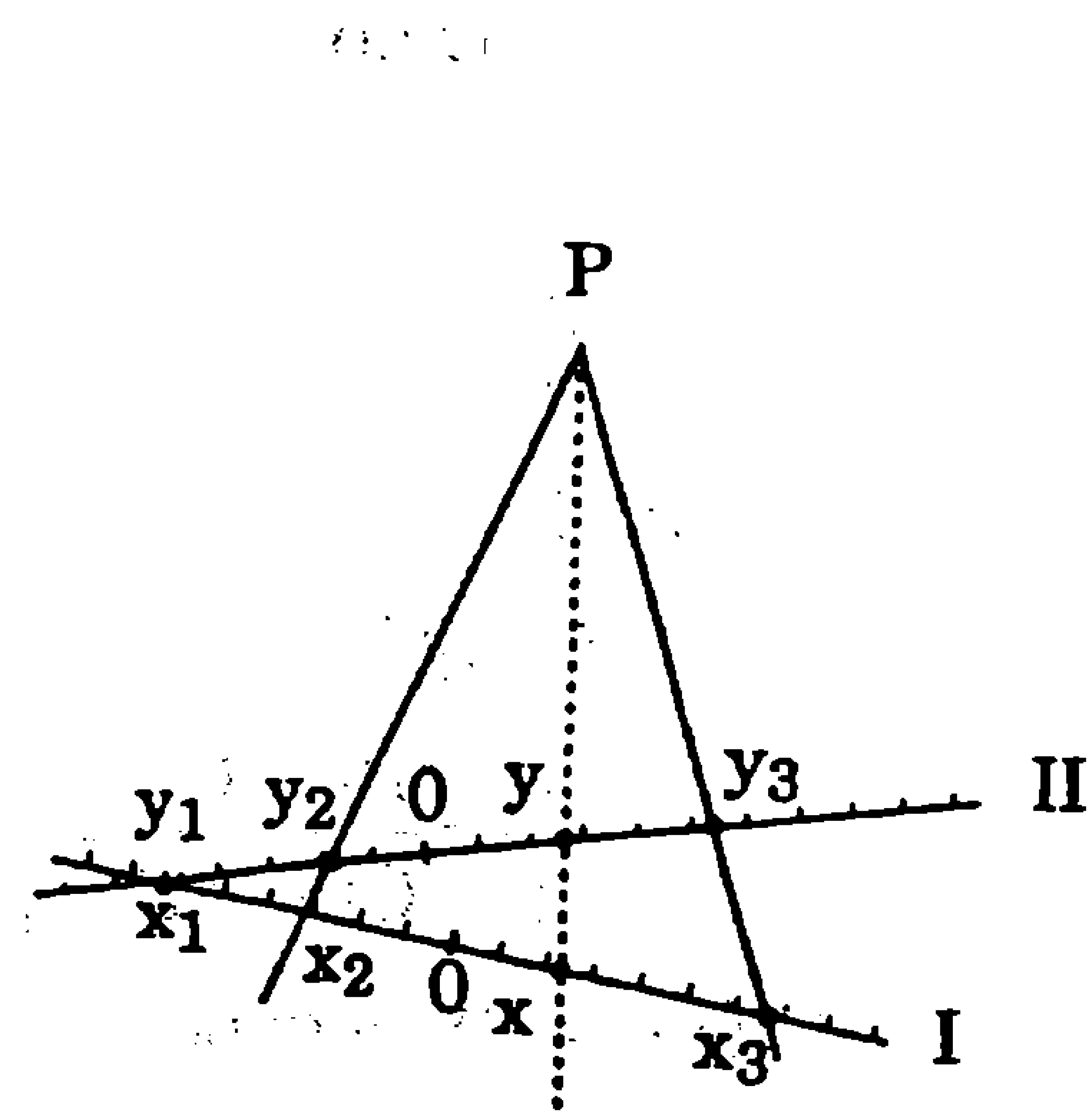
Như vậy là chúng ta đã tạo được thước logarit nhưng đơn vị đã được thu nhỏ k lần. Dùng đồ thị này có thể tính toán được theo (14-6).

Hình 14-5 là ví dụ đặc biệt khi a = b = 1 và k = 2. Lúc này có thể tìm được m = n.

Một số đồ thị tính toán được cấu tạo rất tài tình và tính toán rất đơn giản.



Hình 14-5



Hình 14-6

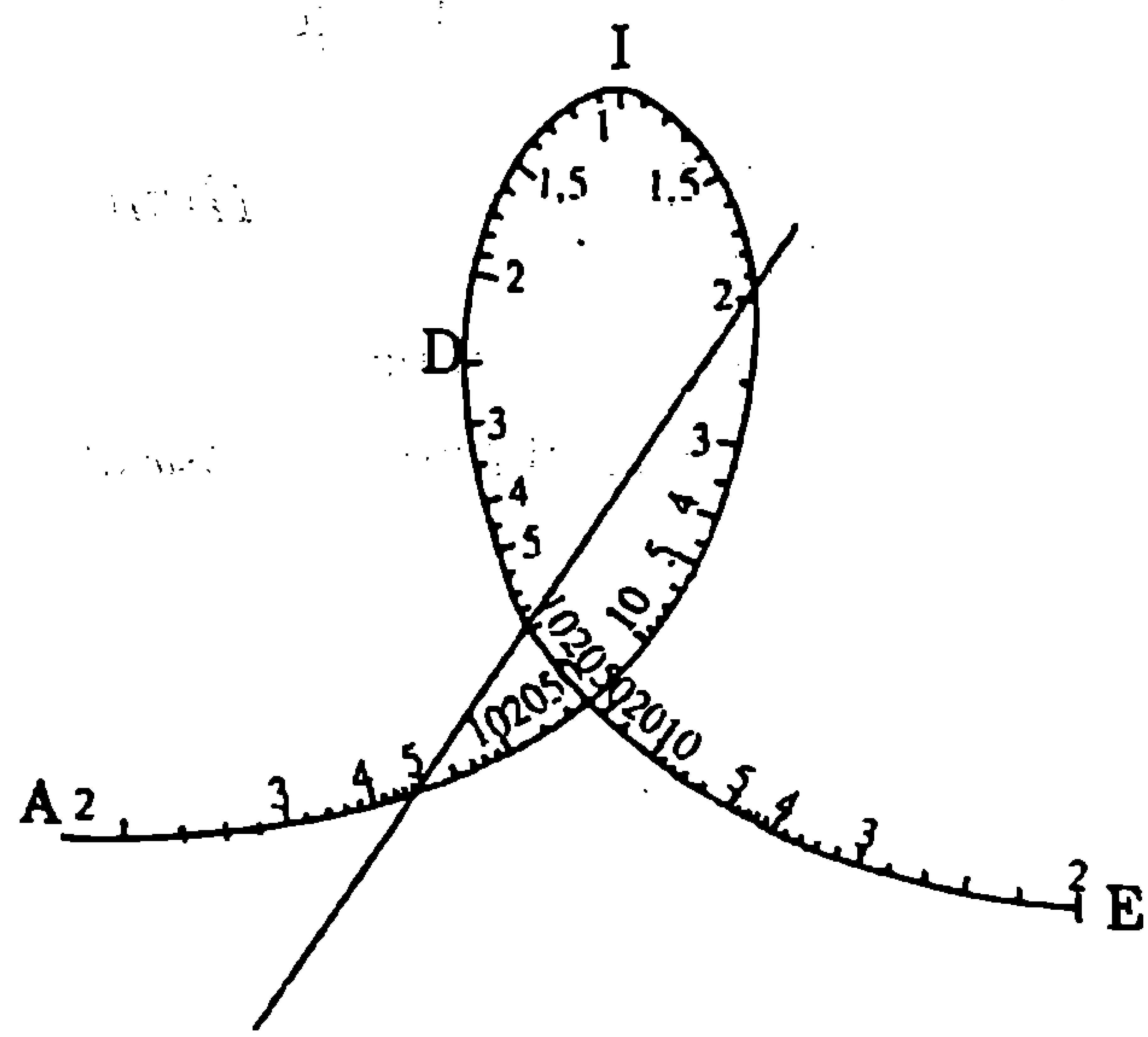
Hình 14-6 có thể dùng cho tính toán trị số trong trường hợp hàm số tuyến tính.

$$y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (14\text{-}12)$$

Thước I là trục tọa độ thông thường (trục x); thước II là trục tọa độ di động (trục y), vạch khắc giống thước I. Ba nhóm trị số đối ứng trên hai thước thoả mãn:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \\ y_3 = f(x_3) \end{cases} \qquad (14\text{-}13)$$

Nếu qua điểm P vẽ một đường thẳng cắt hai thước I và II thì vạch khắc của giao điểm x, y sẽ thoả mãn (14-12).



Hình 14-7

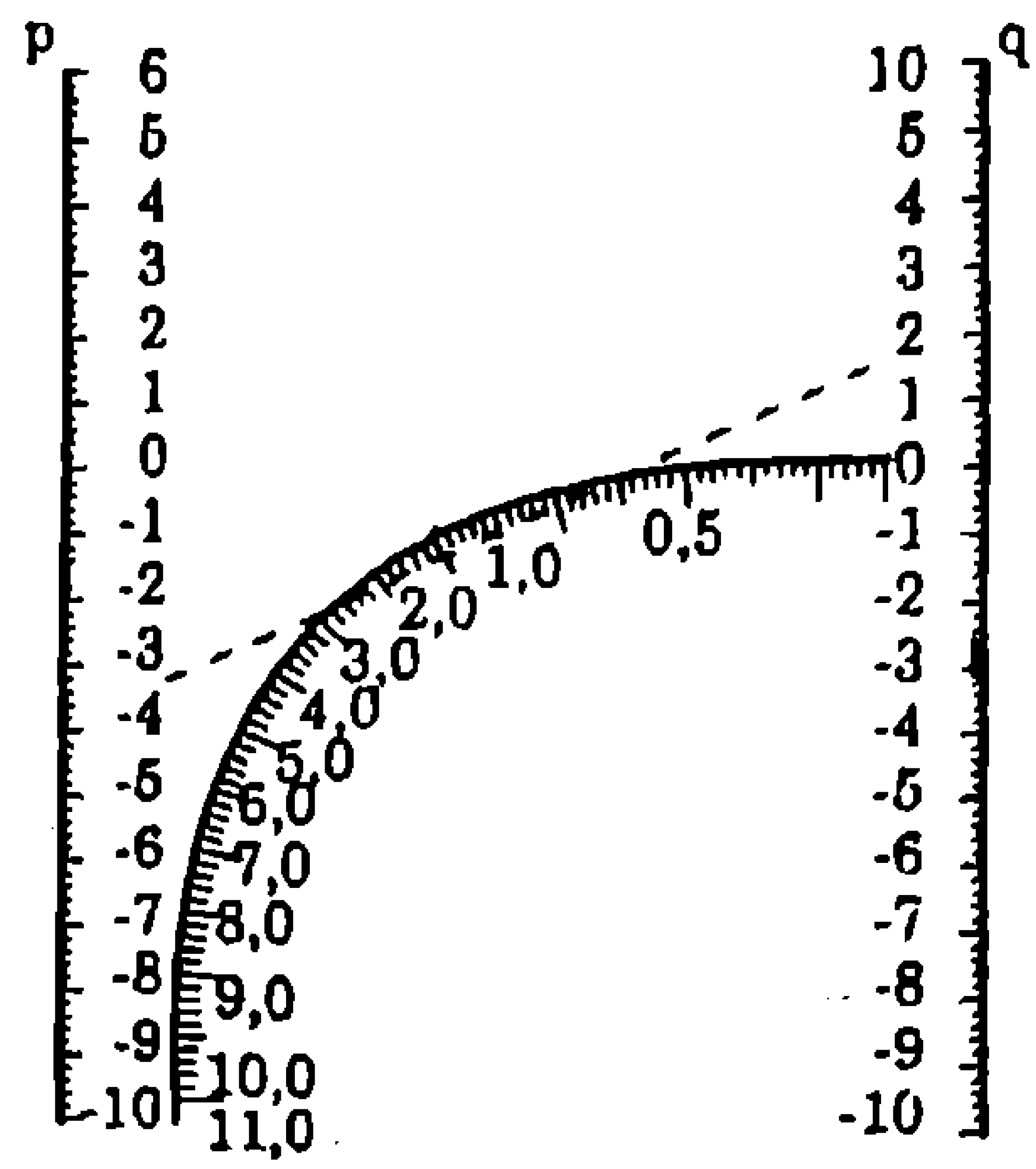
Hình 14-7 là đồ thị tính toán tinh xảo, có một không hai: Chỉ có một đường cong, một thước thẳng sẽ vẽ được ba giao điểm mà vạch khắc của nó biểu thị riêng rẽ số nhân, số bị nhân và tích số.

Đồ thị tính toán ở hình 14-8 có thể làm bạn đọc không ngờ tới, bởi vì có thể từ hai hệ số p và q của phương trình bậc hai:

$$x^2 + px + q = 0$$

ta dễ dàng tìm được hai nghiệm của phương trình.

Theo đồ thị, nếu p = -4 và q = 2, đọc ra nghiệm tương ứng là x_1 = 3,4 và x_2 = 0,6. Nếu đường thẳng không cắt đường cong thì chứng tỏ phương trình bậc hai đã cho không có nghiệm thực. Nếu đường thẳng tiếp xúc với đường cong thì chứng tỏ phương trình bậc hai đã cho có nghiệm kép.



Hình 14-8

Việc tính toán bằng đồ thị thật thú vị. Từ thời G.Monge đến nay đã trải qua hai thế kỷ mà vẫn hấp dẫn. Ngày nay phương pháp tính toán này đã phát triển thành một nhánh của toán học ứng dụng.

15. PHƯƠNG PHÁP LẤY TRỊ SỐ MỘT CÁCH KHOA HỌC

Sau đây là một tình huống cần đến trí tuệ, có cả thú vị và thực dụng:

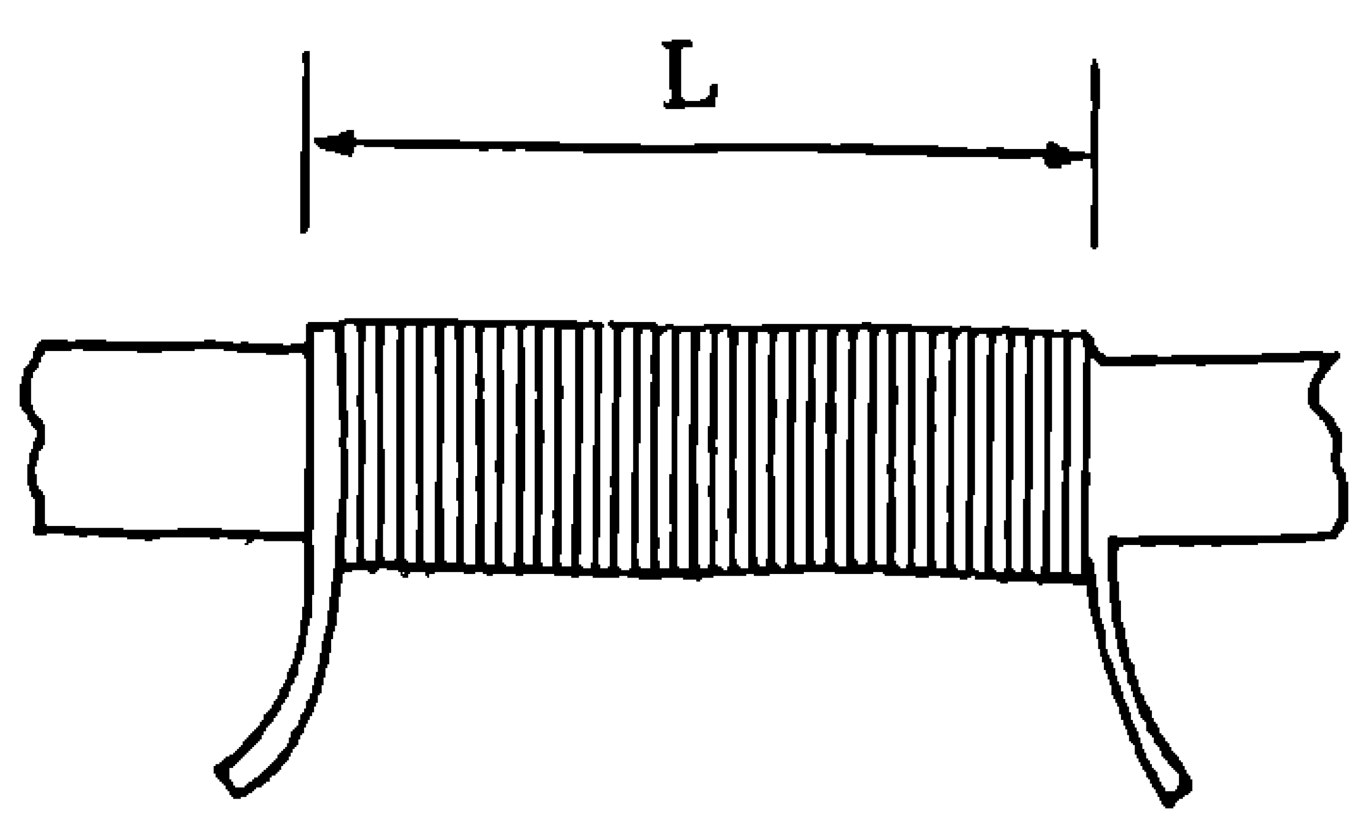
Đưa cho bạn cuốn sách, bạn có thể đo được chiều dày của một tờ giấy có chia khắc độ dài không? Đáp án là được! Bạn đọc thông minh chắc chắn đã biết cách làm: đo chiều dày cả cuốn sách (nếu sách quá mỏng thì đo vài ba cuốn cùng loại), sau đó chia cho số tờ sẽ được chiều dày một tờ giấy.

Chẳng hạn, lấy cuốn "Từ điển toán học thông dụng" làm ví dụ. Trừ bìa ra, cuốn sách này đo được dày 32mm. Sách dày 664 trang, tức là 332 tờ, vậy mỗi tờ dày:

$$x = \frac{32}{332} = 0{,}0964\,(\text{mm})$$

Phương pháp này có thể dùng cho trường hợp tương tự. Ví dụ, để đo được đường kính sợi dây bọc sơn nhỏ d dùng trong vô tuyến điện, người ta làm như sau: quấn chặt sợi dây n vòng sít nhau trên bút chì, như ở hình 15-1, sau đó đo chiều dài L đoạn dây quấn. Từ quan hệ nd = L ta tính được đường kính sợi dây bọc sơn nhỏ.

$$d = \frac{L}{n}$$



Hình 15-1

Tuy nhiều người hiểu được phải làm như trên, nhưng không chắc tất cả đều hiểu nguyên lý khoa học của việc làm đó. Vẫn lấy việc đo chiều dày của tờ giấy trong cuốn "Từ điển toán học thông dụng" làm ví dụ. Trên thực tế chúng ta rất khó tìm chiều dày của tờ giấy nào lại vừa đúng bằng 0,0964mm, mỗi tờ giấy thứ i trong 332 tờ giấy của cuốn sách đó đều có chiều dày riêng a_i của nó (tính ra mm), nhưng xét:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{332}$$

thì tổng của 332 số này là một đại lượng không đổi, tức là:

$$\sum_{i=1}^{332} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{332} = 32$$

còn trị số 0,0964 (mm) là trị số trung bình của 332 số đó.

Điều mà chúng ta cần chứng minh là: Đối với n trị số quan trắc $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ của x, trị số trung bình:

$$x = \frac{\sum a_i}{n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \tag{15-1}$$

của chúng là trị số lấy lý tưởng nhất của x mà cần phải đo để xác định. Dấu cộng trong (15-1) biểu thị sự cộng dồn từ 1 đến n.

Sự thực là, trị số x lý tưởng nhất cần làm cho tổng của nó với hiệu số của n trị số quan sát là nhỏ nhất. Nhưng xét đến hiệu số $(x - a_i)$ với $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ có thể dương hoặc âm, nhưng nếu cộng chúng với nhau trực tiếp thì tất phải làm cho trị số của một số hiệu số nào đó triệt tiêu với nhau, ảnh hưởng đến tính chân thực của nó. Điều này rõ ràng là không hợp lý. Thế là người ta nghĩ đến việc thay thế hiệu số tương ứng bằng $(x - a_i)^2$. Như vậy, lấy trị số lý tưởng nhất khi hàm số:

$$y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$
$$= nx^2 - 2\left(\sum a_i\right)x + \sum a_i^2 \qquad (15\text{-}2)$$

lấy trị số nhỏ nhất. Biểu thức (15-2) chính là hàm số bậc 2 của x. Dễ thấy nó lấy trị số nhỏ nhất khi $x = \dfrac{\sum a_i}{n}$. Đây chính là lý do vì sao trị số trung bình có thể xem là lấy trị số lý tưởng lượng quan trắc.

Cũng nguyên lý như vậy nhưng tính toán hơi phức tạp hơn một chút, kết quả sẽ thu được vấn đề sau đây:

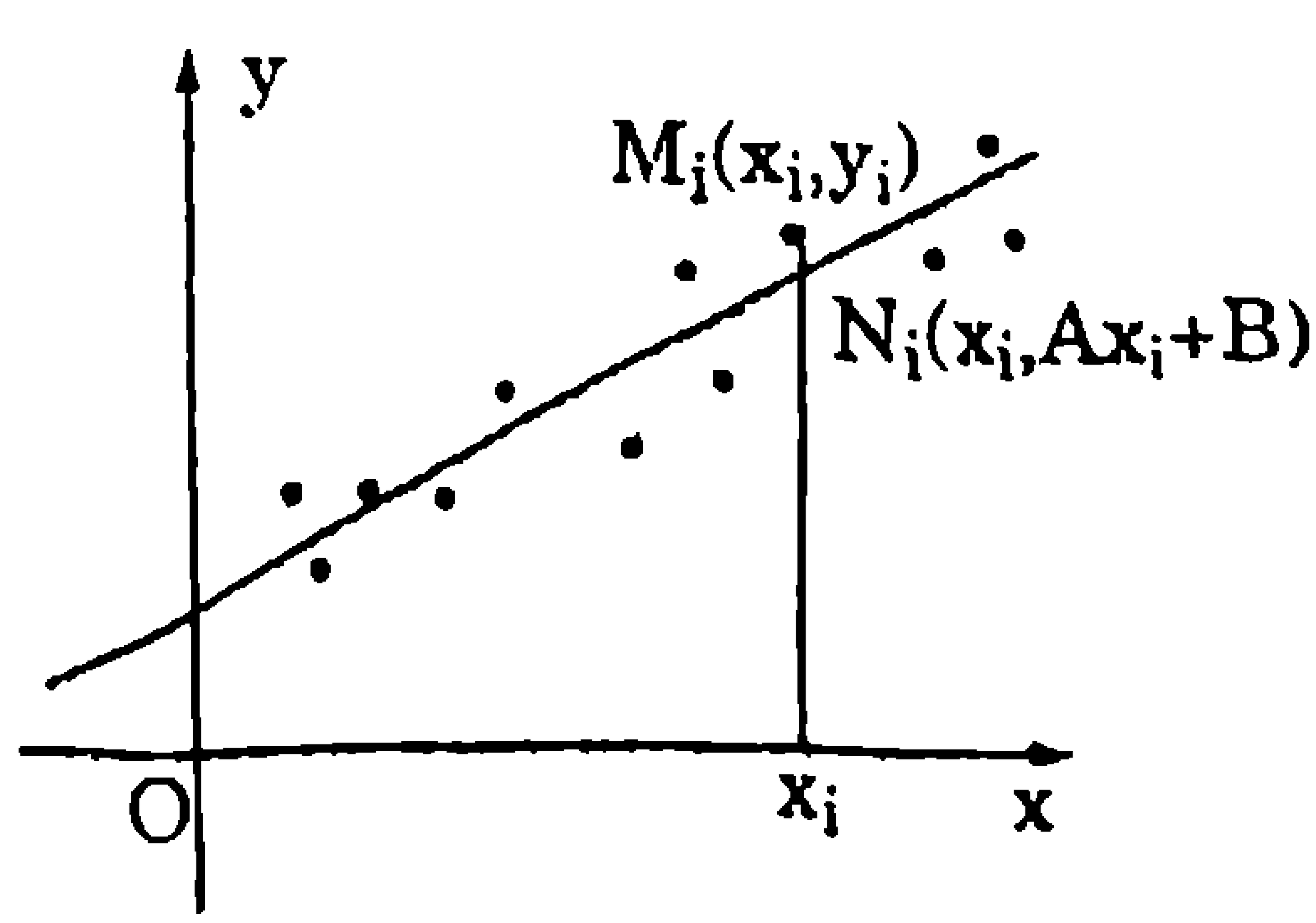
Giả sử chúng ta quan sát n điểm thực nghiệm:

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n).$$

Nếu chúng ta cho rằng n điểm thực nghiệm $M_i(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ này có sai số khi quan trắc đối với các điểm trên đường thẳng $y = Ax + B$ (hình 15-2) thì đại lượng

$$y = \sum \overline{M_iN_i}^2 = \sum [y_i - (Ax_i + B)]^2 \qquad (15\text{-}3)$$

là tổng bình phương sai số giữa các điểm thực nghiệm $M_i(x_i, y_i)$ với các điểm $N_i(x_i, Ax_i + B)$ tương ứng trên đường thẳng. Cần lấy A và B sao cho trị số y trong (15-3) cực tiểu.



Hình 15-2

Đây là vấn đề nổi tiếng trong toán học, gọi là "phương pháp bình phương tối thiểu", được C.F.Gauss tìm ra năm 1795 khi ông chỉ mới 18 tuổi!

Hàm số (15-3) có thể viết thành hàm số bậc 1 của A:

$$y=\left(\sum x_i^2\right)A^2-2\left[\sum x_i(y_i-B)A+\sum(y_i-B)^2\right] \qquad (15\text{-}4)$$

Từ (15-4) thấy rằng, nếu

$$A=\frac{\left(\sum x_i y_i\right)-B\left(\sum x_i\right)}{\left(\sum x_i^2\right)} \qquad (15\text{-}5)$$

thì trị số y cực tiểu.

Từ (15-5), ta có:

$$\left(\sum x_i^2\right)A+\left(\sum x_i\right)B=\sum x_i y_i \qquad (15\text{-}6)$$

Tương tự, hàm số (15-3) cũng có thể viết thành hàm số bậc 1 của B và ta được:

$$\left(\sum x_i^2\right)A+nB=\sum y_i \qquad (15\text{-}7)$$

Viết (15-6) và (15-7) thành hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(\sum x_i^2\right)A+nB=\sum y_i\\ \left(\sum x_i^2\right)A+\left(\sum x_i\right)B=\sum x_i y_i\end{cases} \qquad (15\text{-}8)$$

Từ (15-8) chúng ta có thể xác định trị số của hai tham số A và B, từ đó được một đường thẳng áp sát nhất với n điểm thực nghiệm M_i (đường thẳng của hàm số bậc một: $y = Ax + B$).

"Phương pháp bình phương tối thiểu" có rất nhiều ứng dụng kỳ diệu trong khoa học. Sau đây là một ví dụ tuyệt vời trong thực tế nhưng như thần thoại; nhờ công cụ toán học này đã giúp các nhà lịch sử giải được một sự kiện thiên cổ.

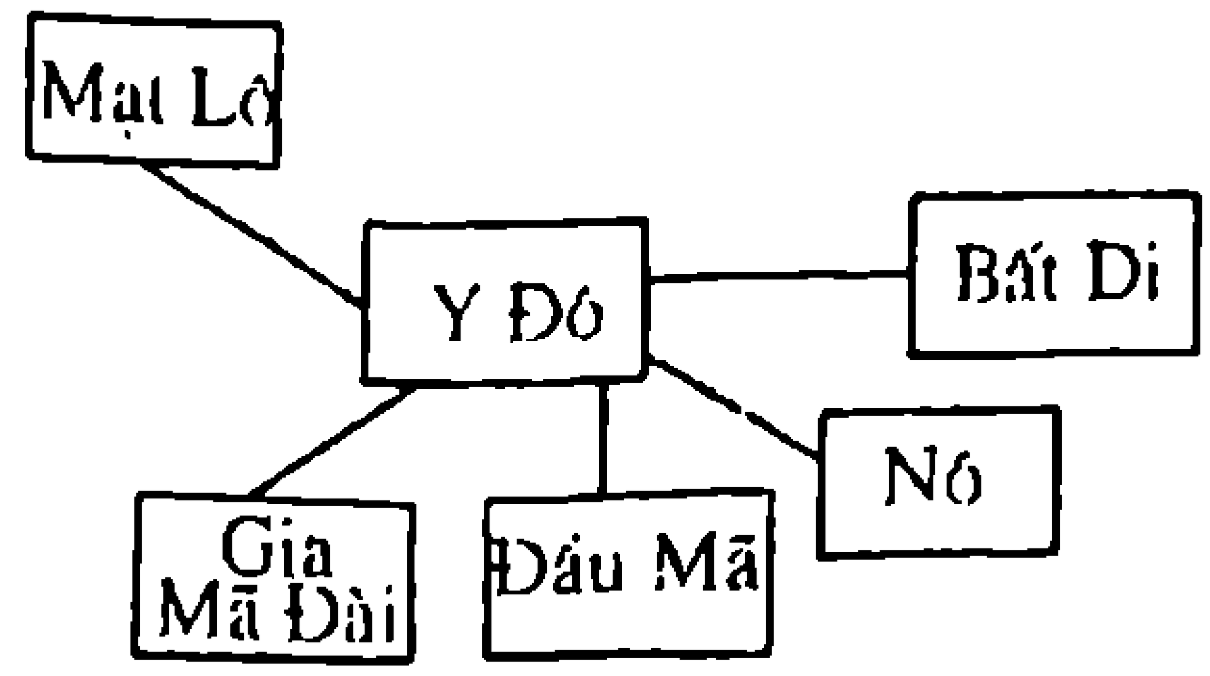
Truyền thuyết ghi lại rằng, Nhật Bản cổ xưa xuất phát từ nước Gia Mã Đài cường thịnh, có nền văn hoá phát triển. Năm 239, nữ vương Tidiho của nước Gia Mã Đài đã phái sứ thần sang kinh đô Lạc Dương của nước Ngụy để tiến cống vật phẩm cho Ngụy Minh Đế (cháu Tào Tháo). Ngụy Minh Đế ban thưởng cho Tidiho là "Thân Ngụy Oa Vương" (Vua Nhật thân Ngụy) và cho nhiều vàng bạc, châu báu, lụa là.

Đoạn ghi chép sự kiện lịch sử qua lại kết giao hữu hảo Trung - Nhật này trải qua những năm tháng dài gần hai nghìn năm, ký ức của mọi người dần phai nhạt đến mức ngay cả nước Gia Mã Đài ở đâu của Nhật Bản ngày nay cũng không ai trả lời chính xác được.

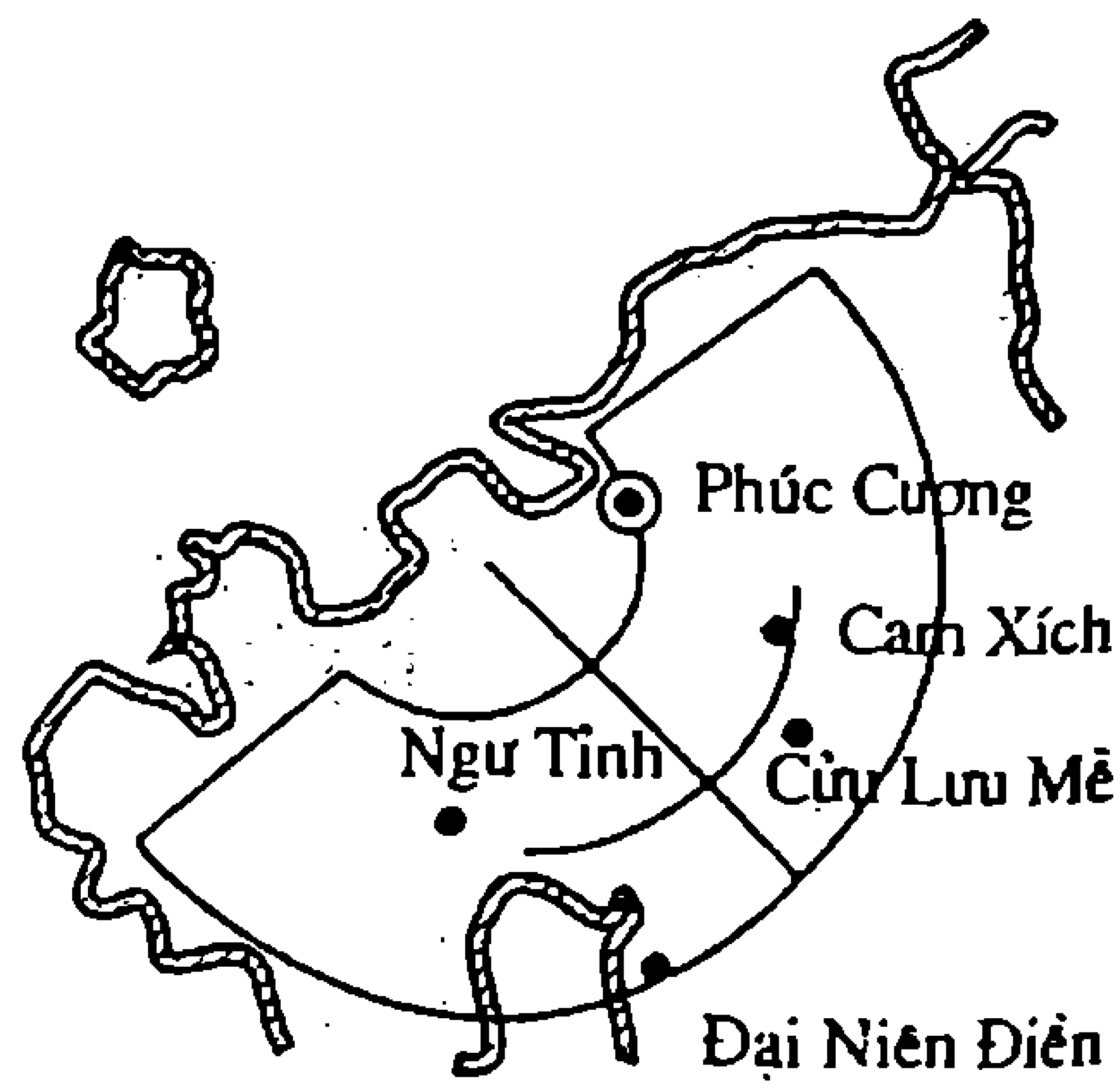
Ở trường Đại học Tokyo Nhật Bản có giáo sư sử học Bình Sơn. Ông không chỉ tinh thông về lịch sử, mà còn có cơ sở trường toán học. Một hôm giáo sư đang đọc "Tam quốc diễn nghĩa", đột nhiên có một đoạn trong thiên "Ngụy Chí Oa" làm ông chú ý. Trong đoạn văn này có ghi chép hành trình thực tế của sứ thần nước Ngụy đến nước Gia Mã Đài. Một linh cảm đột nhiên đến khiến giáo sư đọc từng câu, từng chữ của đoạn văn. Tuy vậy, ông chỉ thấy trong đó viết:

"... Từ Quận đến Oa đi thuyền theo bờ biển hơn hai nghìn dặm, gặp nước Hàn, đến bờ Bắc Cẩu Tà của nước Hàn rồi qua biển hơn nghìn dặm mới đến được nước Mã,... Lại đi về phía Nam, qua hơn nghìn dặm trên biển đến nước Nhất Đại,... Lại vượt hơn nghìn dặm trên biển đến nước Mạt Lô, theo hướng Nam đi trên đất năm trăm dặm đến nước Y Đô,... Lại theo hướng Đông Nam đi trăm dặm đến nước Nô,... Đi trăm dặm đến nước Bất Di, đi theo hướng Nam đến nước Đầu Mã. Lại đi đường thuỷ hai mươi ngày theo hướng Nam đến nước Mã Gia Đài,... Kinh đô của nữ vương có hơn bảy vạn hộ,...".

Do vậy, sau khi đọc kỹ đoạn văn, ông hết hy vọng, bởi vì ông chưa tìm được điều mong muốn. Thế nhưng sau đó ông phát hiện ra rằng, hóa ra chữ "dặm" trong đoạn văn đó là "một câu đố trong câu đố"!



Sự hoài nghi này phải nói là có lý, bởi vì đơn vị chiều dài cổ đại không giống như ngày nay. Bạn đọc đã xem "Tam quốc diễn nghĩa" có đoạn miêu tả Lưu Bị cao 7,5 thước, Trương Phi cao 8 thước, Quan Văn Trường cao 9 thước,... Tính đổi theo đơn vị ngày nay thì chiều cao của họ đáng đặt dấu hỏi!



Nhưng giáo sư Bình Sơn không nản lòng. Từ sự khác nhau trong câu chữ của đoạn văn, ông phân tích ra Y Đô có thể là đại bản doanh của sứ thần, Đầu Mã và Nhất Đại có thể là đảo Đối Mã và đảo Nhất Kỳ ngày nay. Như vậy, ông đã làm cho tất cả các số liệu của mình có thể tham khảo được. Từ đó, ông vận dụng "phương pháp bình phương tối thiểu" một cách khoa học, tìm được quan hệ hàm số giữa dặm thời Nguỵ với kilômét ngày nay là:

$$y = 0{,}0919x - 9{,}90 \qquad (15\text{-}9)$$

Từ (15-9) giáo sư xác định Y Đô là huyện Phúc Cương của đảo Bản Châu của Nhật Bản ngày nay.

Nhưng khi giáo sư tiếp tục thì có vấn đề không ổn, bởi vì cuối cùng đã tìm được Gia Mã Đài lại ở vùng núi hoang vu của đảo Cửu Châu. Điều này không thể xảy ra được. Ngay bản thân giáo sư cũng hoài nghi kết luận này. Một quốc gia phồn thịnh, kinh đô có đến bảy vạn hộ, bất kể như thế nào thì ngày nay cũng không thể hoang vắng đến mức không còn dấu vết của con người được.

Giáo sư Bình Sơn đã lật đi lật lại vấn đề và cuối cùng đã tìm ra chính hiện tượng đã nói trong mục 3 "Trò chơi trên quảng trường Manke" là thủ phạm. Thực tế sứ thần không phải đi theo đường thẳng mà là đường vòng cung. Sau khi hiệu chỉnh, ông đã rút ra được kết luận kinh ngạc: Trung tâm Gia Mã Đài cổ xưa ở vào Cửu Lưu Mễ của huyện Phúc Cương thuộc Nhật Bản ngày nay!".

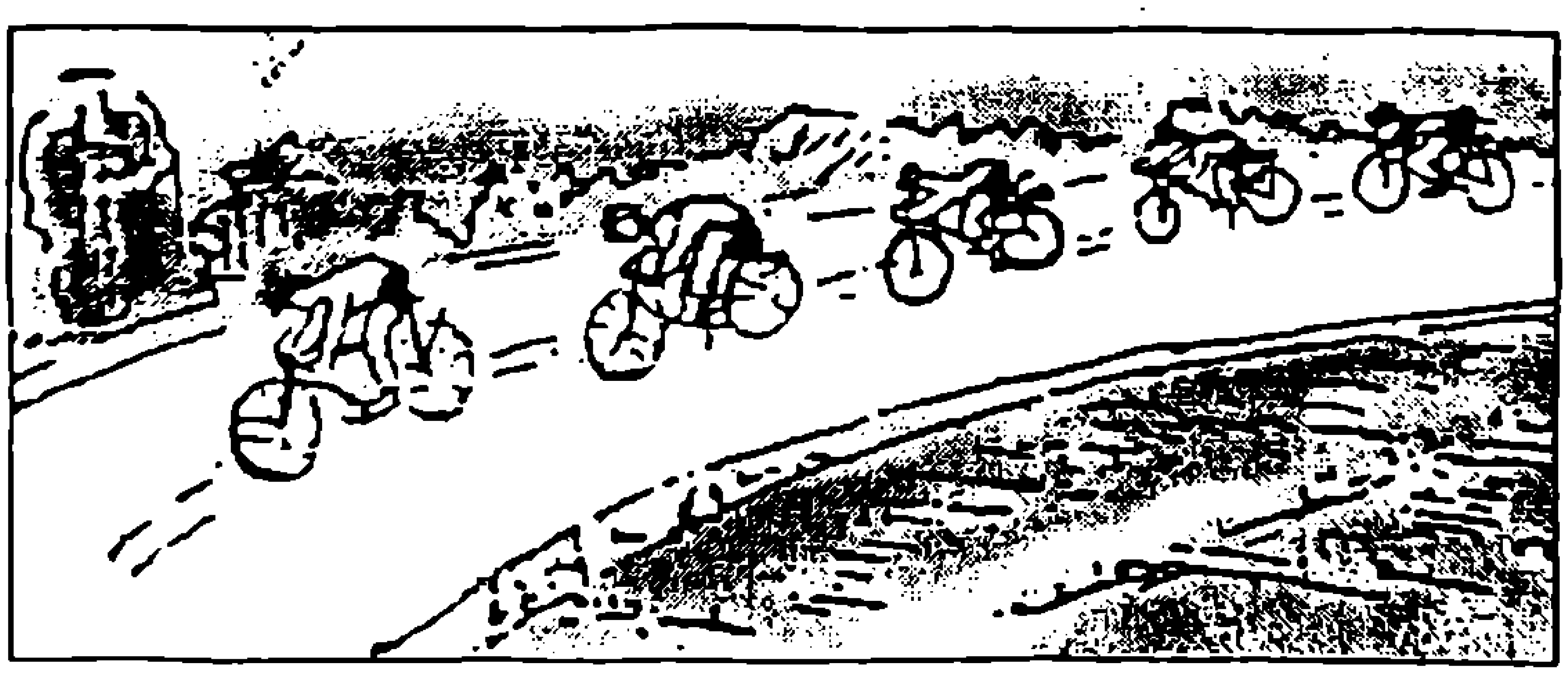
Gần đây các nhà khảo cổ học đang tiến hành tìm kiếm tại thực địa. Họ hy vọng sẽ có một ngày nào đó phát hiện ra lăng tẩm của nữ vương Tidiho trong vùng Cửu Lưu Mễ.

16. ĐƯỜNG CONG HÌNH CÁI CHUÔNG THẦN BÍ

Cuộc tranh luận của các nhà toán học và các nhà vật lý học thật thú vị. Các nhà vật lý học luôn tán dụng các số liệu thực nghiệm của mình là "khuôn vàng thước ngọc", còn các nhà toán học thì kiên trì chứng minh là thực nghiệm không thể chính xác tuyệt đối, các số liệu thu được từ thực nghiệm chỉ có thể là số liệu có sự sai lệch so với trị số lý thuyết mà thôi!

Các nhà vật lý học đã dùng kính viễn vọng thiên văn và quan sát thấy các sao ở xa đang rời dần chúng ta, từ đó nhận xét rằng: "Vũ trụ của chúng ta đang phình to!".

Các nhà toán học lại giải thích rằng: "Điều này phải xem xét lại, vì như các vị thấy, trong cuộc đua xe đạp, A, B, C, D, E mỗi người đều chạy theo cùng một hướng trên đường chạy hình vòng cung, tốc độ của A > B, tốc độ của B > C, tốc độ của C > D, tốc độ của D > E nhưng khi đó từng người đều cảm thấy người khác đang rời xa mình!".



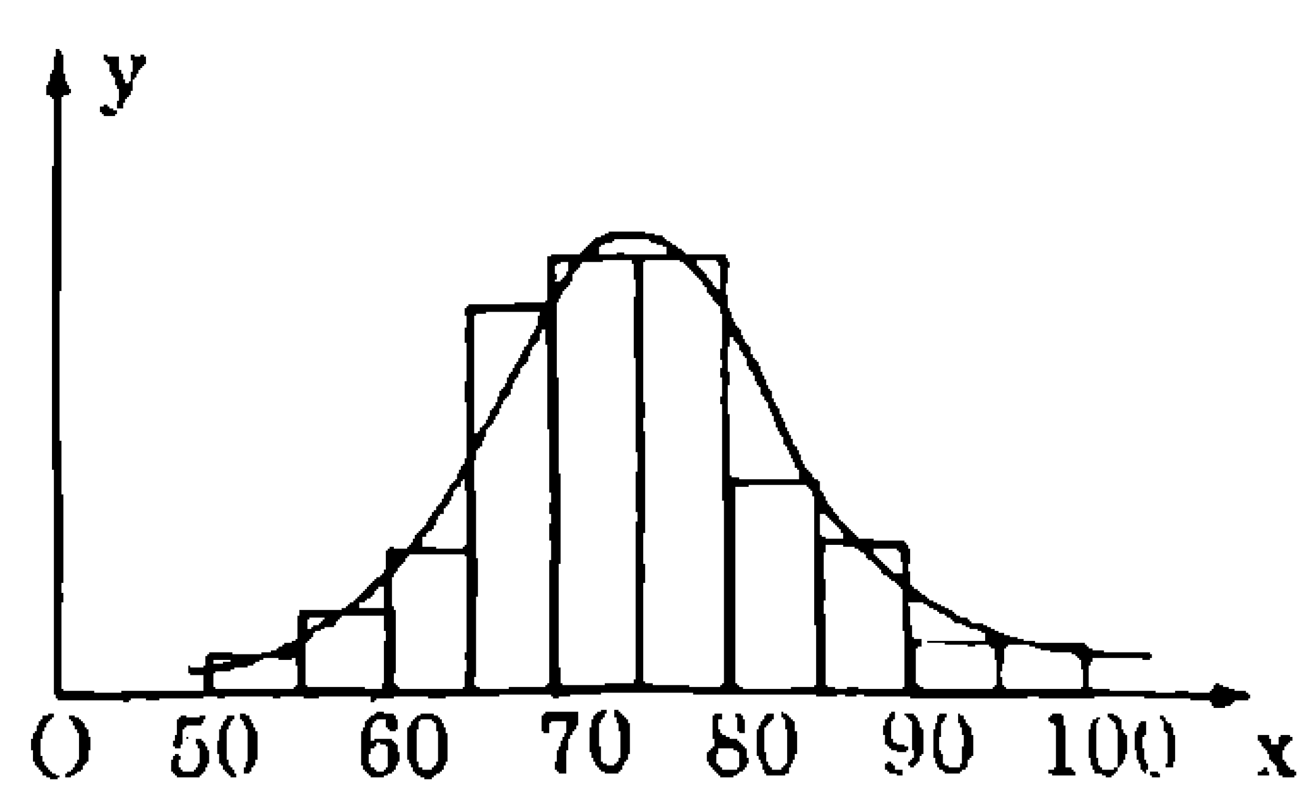
Tuy vậy, điều đáng mừng là nhờ các tranh luận này mà các nhà toán học tìm được mô thức thực tiễn cho lý thuyết và các nhà vật lý học tìm được căn cứ lý thuyết cho thực tiễn! Có một điều không thể bác bỏ được là, số liệu đo đạc được không thể chính xác tuyệt đối. Điều phải bổ sung là, bản thân sai lệch trong đo đạc cũng tuân theo quy luật.

Một giáo viên khi thống kê thành tích học tập của hai lớp mà mình dạy, được số liệu như bảng 16-1.

Bảng 16-1

Đoạn chia số	Tần số	Tần số tương đối
95-100	1	0,01
90-95	4	0,04
85-90	7	0,07
80-85	22	0,22
75-80	24	0,24
70-75	24	0,24
65-70	10	0,10
60-65	6	0,06
55-60	1	0,01
50-55	1	0,01
Tổng cộng	100	1

Từ số liệu ở bảng 16-1 giáo viên vẽ biểu đồ vuông như ở hình 16-1. Từ đó giáo viên phát hiện ra rằng: Biểu đồ này tiếp cận với đường cong hình cái chuông (có hai bên thấp, giữa cao). Loại đường cong hình cái chuông nhiều khi xuất hiện một cách thần bí.



Hình 16-1

Trong mục 22 "Mất dê do đường rẽ" của cuốn *Những câu chuyện lý thú về phương trình* đã nói về tam giác Giả Hiển (nhiều người gọi là tam giác Dương Huy, tam giác Chu Shi Kie, tam giác Pascal). Ta dễ thấy rằng, trong tam giác này, tổng cộng mỗi hàng số đều là luỹ thừa của 2. Chẳng hạn, tổng cộng của các số hàng thứ 10 là 512, tức là 2^9 (hình 16-2).

Nếu vẽ tọa độ của những số này theo phân bố của dãy, chúng ta có thể nối thành đường cong hình cái chuông.

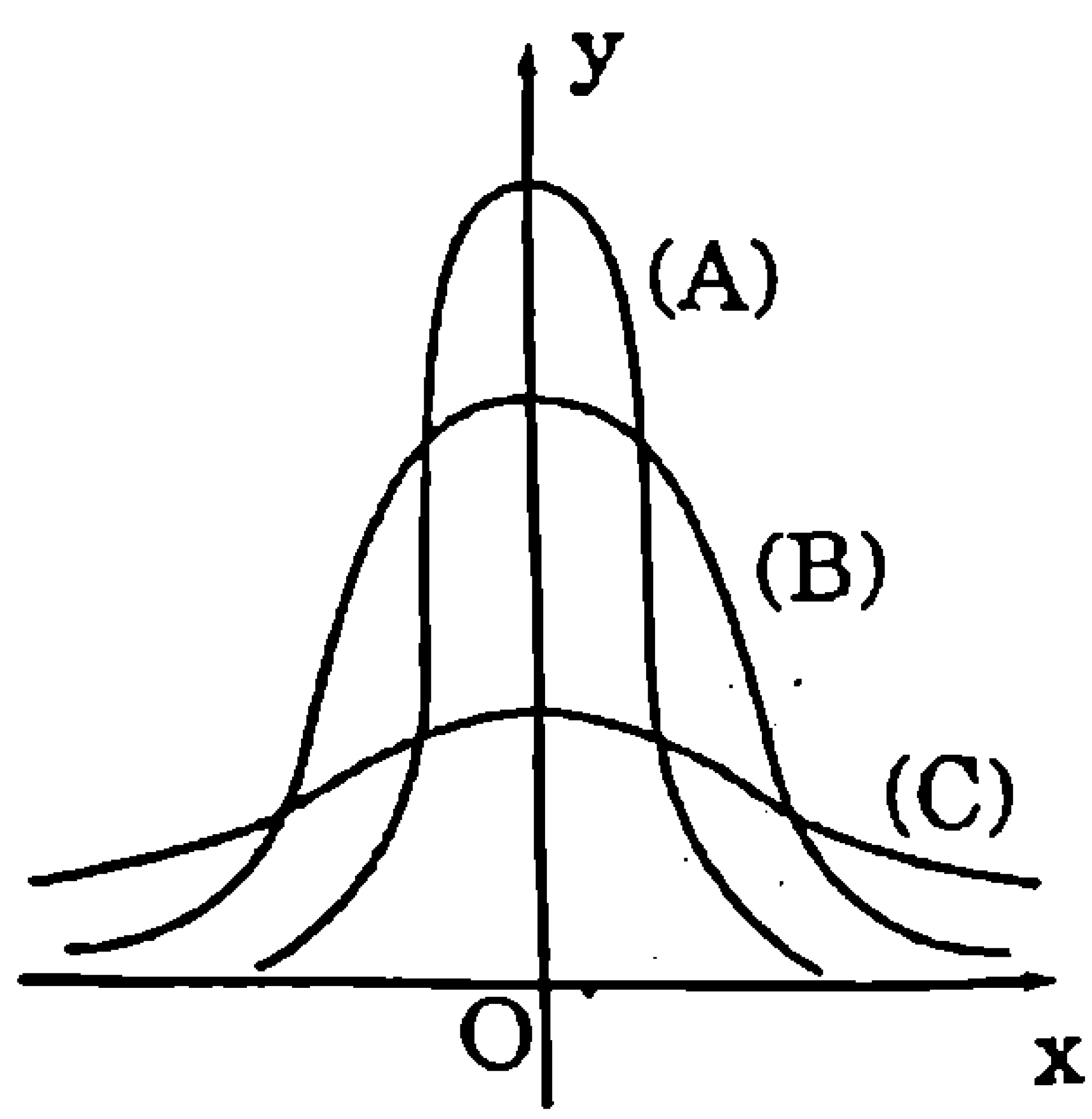
Bây giờ ta lấy ví dụ về kết quả bắn súng.

Có lẽ bạn đọc cũng nghĩ rằng, thiện xạ cũng không thể "bách phát bách trúng", chỉ là cơ hội bắn trúng hồng tâm của người đó cao hơn người khác mà thôi. Hình 16-3 vẽ đường cong hình cái chuông theo tỷ lệ bắn trúng đích của thiện xạ A, của xạ thủ bình thường B và của người bình thường C. Sự khác biệt giữa họ có thể nhìn thấy ngay được.

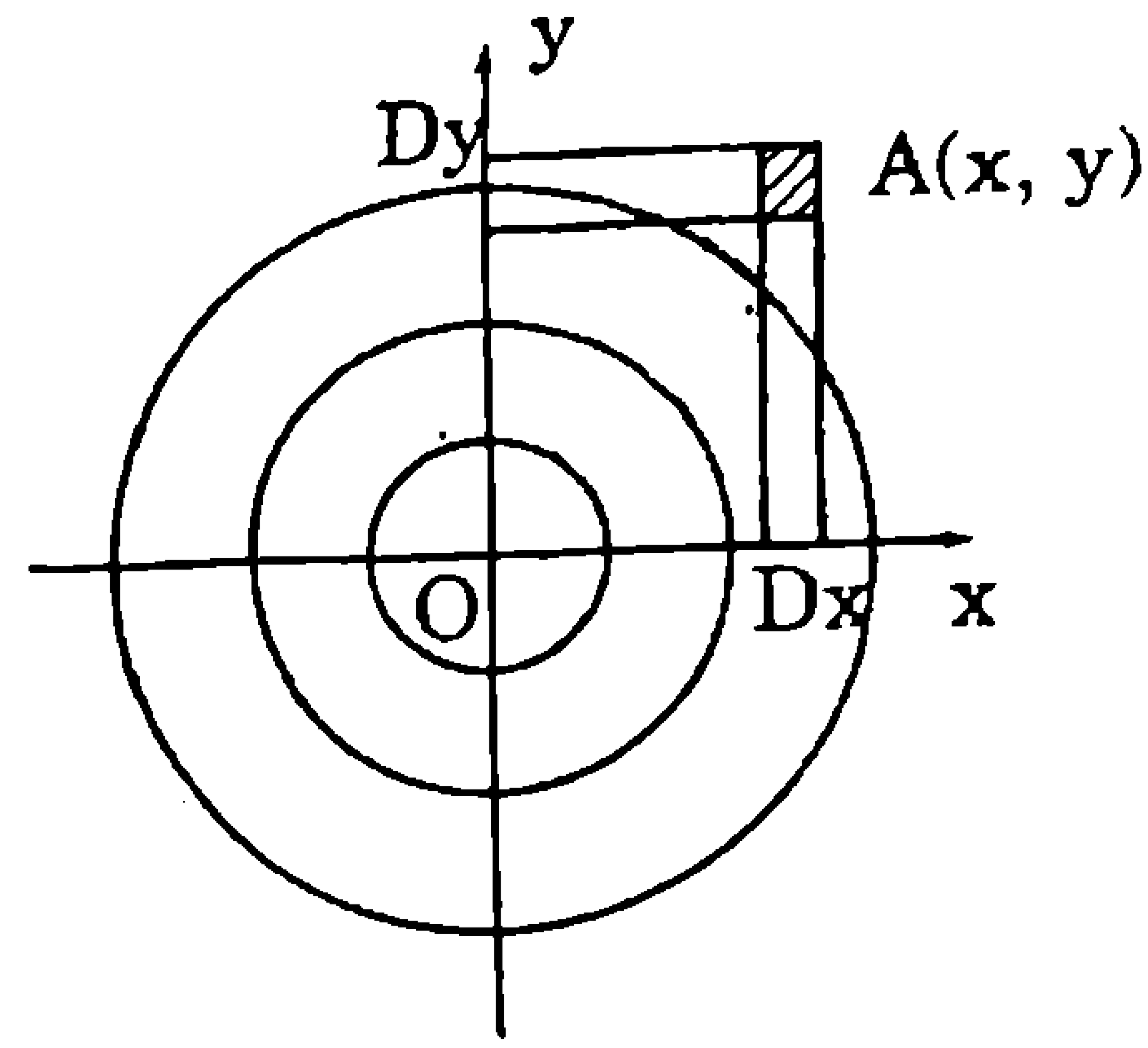
1	2^0
1 1	2^1
1 2 1	2^2
1 3 3 1	2^3
1 4 6 4 1	2^4
1 5 10 10 5 1	2^5
1 6 15 20 15 6 1	2^6
1 7 21 35 35 21 7 1	2^7
1 8 28 56 70 56 28 8 1	2^8
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	2^9
...	...

Hình 16-2

Muốn vén bức màn bí ẩn của đường cong hình cái chuông thần bí, chúng ta còn phải nhờ tới ví dụ bắn súng.



Hình 16-3



Hình 16-4

Khi chúng ta ngắm vào tâm bia để bắn, ở chỗ càng xa tâm bia khả năng trúng đạn càng ít. Nếu lấy tâm bia làm gốc, dựng hệ tọa độ vuông góc xOy như ở hình 16-4 và gọi $y = \phi(x)$ là đường cong hình cái chuông của tỷ lệ bắn trúng đích dọc theo hướng trục x. Từ quan hệ đối xứng, có thể đặt:

$$\phi(x) = f(x^2) \qquad (16\text{-}1)$$

Từ hình 16-4 dễ dàng thấy: trong n lần bắn, điểm trúng đạn trong dải Δx tỷ lệ thuận với chiều dài dải, số lần bắn và bắn trúng đích, tức là số đạn bắn trúng đích:

$$\Delta n = nf(x^2)\Delta x \qquad (16\text{-}2)$$

Từ đó, tần suất trúng đích trong dải Δx là:

$$\Delta p_x = \frac{\Delta n}{n} = f(x^2)\Delta x \qquad (16\text{-}3)$$

Tương tự ta có:

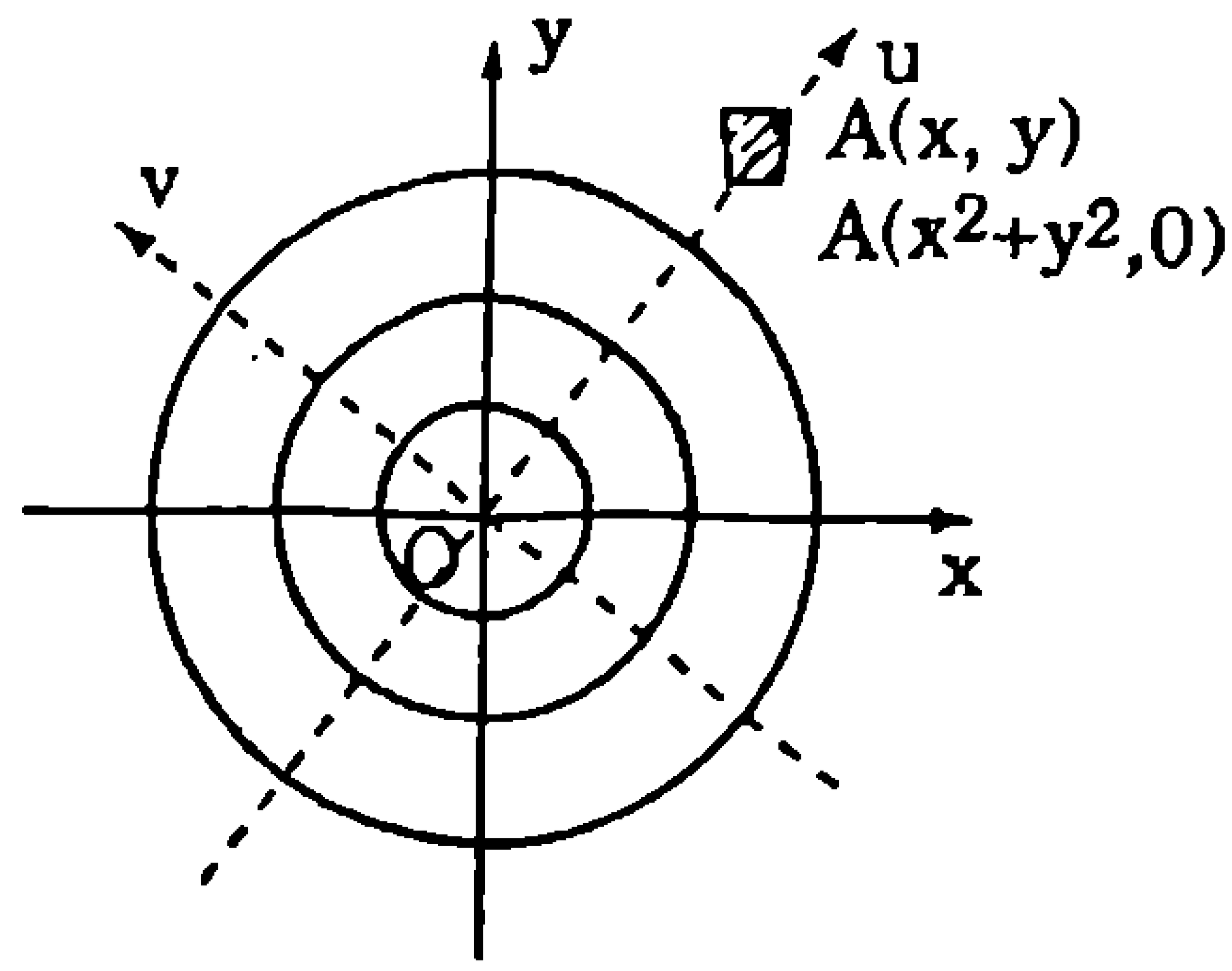
$$\Delta p_y = f(y^2)\Delta y \qquad (16\text{-}4)$$

Đối với cả mặt bia, tần suất trúng đạn Δp của vùng gạch gạch có thể viết được là:

$$\Delta p = \Delta p_x \times \Delta p_y = f(x^2) \times f(y^2)\, \Delta A \qquad (16\text{-}5)$$

trong đó $\Delta A = \Delta x \times \Delta y$.

Cũng trên mặt phẳng đó và cũng lấy điểm O làm gốc, ta dựng hệ tọa độ uOv nhưng trục Ou đi qua điểm A(x, y) (hình 16-5). Do tần suất của điểm trúng đạn không liên quan gì đến việc lựa chọn hệ tọa độ trên, ta có:



Hình 16-5

$$\Delta p = \Delta p_u \times \Delta p_v = f(u^2) \times f(v^2)\, \Delta A \qquad (16\text{-}6)$$

Cần chú ý rằng, điểm A(x, y) trong tọa độ xOy thì trong tọa độ uOv sẽ là $A(x^2 + y^2, 0)$. Từ đó:

$$f(x^2) \times f(y)^2 = f(x^2 + y^2) \times f(0) \qquad (16\text{-}7)$$

Gọi $f(0) = k$; $x^2 = \alpha$ và $y^2 = \beta$ thì (16-7) trở thành:

$$f(\alpha)\times f(\beta) = kf(\alpha + \beta) \qquad (16\text{-}8)$$

Biểu thức (16-8) trong toán học gọi là phương trình hàm số. Ở đây không trình bày cách giải phương trình hàm số, chỉ đưa ra lời giải là:

$$f(\alpha) = ke^{-b\alpha} \qquad (16\text{-}9)$$

Vì càng xa tâm bia khả năng trúng đạn càng ít, cho nên $f(\alpha)$ là hàm số giảm, từ đó $b < 0$. Gọi $b = -h^2$, ta được:

$$f(x^2) = ke^{-h^2x^2} \qquad (16\text{-}10)$$

Vậy:

$$y = \phi(x) = ke^{h^2x^2} \tag{16-11}$$

Đây chính là biểu thức của hàm số đường cong hình cái chuông thần bí. Chỉ ra bí mật này là công lao của P.S.de Laplace.

Đường cong hình cái chuông cũng được gọi là đường cong phân bố dạng chính hoặc đường cong Gauss, là một trong những đường cong quan trọng nhất của nhánh toán học xác suất và thống kê.

17. TUNG BAY TRÊN BẦU TRỜI BAO LA

Từ xa xưa con người đã mơ ước có thể lắp được đôi cánh để tung bay trên bầu trời bao la. Song mãi đến gần hết thế kỷ XIX mơ ước này mới trở thành hiện thực.

Ngày 9/10/1890, C.Ader (1841-1925) người Pháp là người đầu tiên thực hiện mơ ước này trên chiếc máy bay có động cơ để thực hiện một cú "bay vọt lên" ở Armainvilliers (quận Seine et Marne) và bay được 50m ở độ cao 15m. Chuyến bay "duy trì được" đầu tiên vào 10 giờ 35 phút ngày 17/12/1903 được anh em nhà Wright, Wilbur (1867-1912) và Orville (1871-1948) người Mỹ thực hiện. Trong điều kiện cực kỳ khó khăn, với tài nghệ những người sản xuất xe đạp ở Dayton (bang Ohio), hai anh em nhà Wright đã chế tạo trong 7 năm được chiếc máy bay có động cơ hiệu "Phi hành". Sau khi rút thăm, người em đã bay trên chiếc Flyer I được 36,60m trong 12 giây. Sau đó, hai anh em thay nhau bay chuyến 2 và 3 được 13 và 14 giây, rồi chuyến 4 bay 284m trong 59 giây do W.Wilbur thực hiện tại làng Kitty Hawk bên bờ Đại Tây Dương (bang Caroline Bắc).

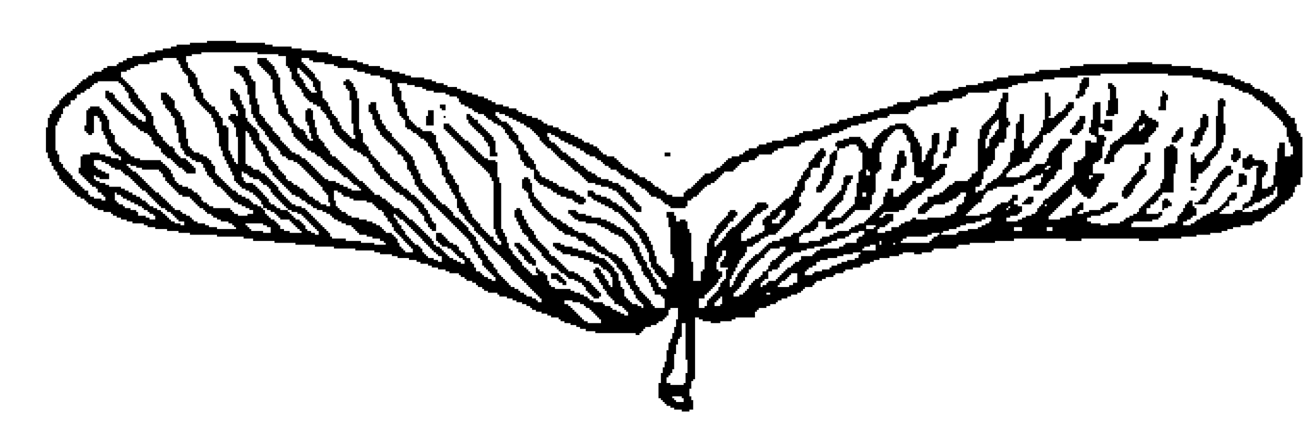
Ngày nay, máy bay vận tải cỡ lớn đã có thể chở được hơn 400 tấn hàng (chẳng hạn, máy bay quân sự AN - 124 của Nga) và máy bay chở khách khổng lồ Boeing 747X với sức chở 500 hành khách. Vừa qua Hãng Boeing đã thông báo ngừng chế tạo loại máy bay này để chuyển sang sản xuất máy bay "Sonic Cruiser" có 100 - 300 chỗ nhưng bay với tốc độ 1150-1186 km/h, bay cao được 12424m. Kỷ lục về máy bay khổng lồ chở khách sẽ thuộc về A380 với sức chở 550-650 hành khách của Tổ hợp hàng không Airbus (hai tầng) sẽ đưa vào phục vụ năm 2004.

Về kỷ lục tốc độ của máy bay: Đến ngày 28/7/1976 đã là 3529,26km/h, do Eldon W.Joersz và George T.Morgan lập được trên chiếc Lockheed SR-71A ở California (Mỹ) trên độ cao 25km. Đến năm 1996 tốc độ lớn nhất của máy bay có người lái đã đạt 7274km/h (của Hãng Nomo Americon Aviayson).

Kỷ lục bay cao đã lập được vào năm 1988 là 18939km (do máy bay P42 của Canada) và năm 1998 là 20818km (do máy bay ER-2 của NASA) để nghiên cứu Trái Đất. Kỷ lục bay xa không phải tiếp nhiên liệu là 20042,2 km do máy bay Boeing 777-200 IGW lập được ngày 2/4/1997. Hiện nay, máy bay có thể bay đến bất cứ nơi nào trên Trái Đất.

Vậy sức mạnh thần kỳ nào đã giúp nhân loại thực hiện được những kỳ tích như vậy? Đây là vấn đề thú vị nhưng lại khiến người ta lúng túng khi trả lời.

Như bạn đọc đã biết, sở dĩ chim bay được vì chúng có bộ cánh khoẻ. Cánh vỗ vào không khí sinh ra một lực nâng chim lên. Trong tự nhiên có một số hạt thực vật cũng bay được. Tuy vậy, đây là một vấn đề hoàn toàn khác với sự bay của chim.

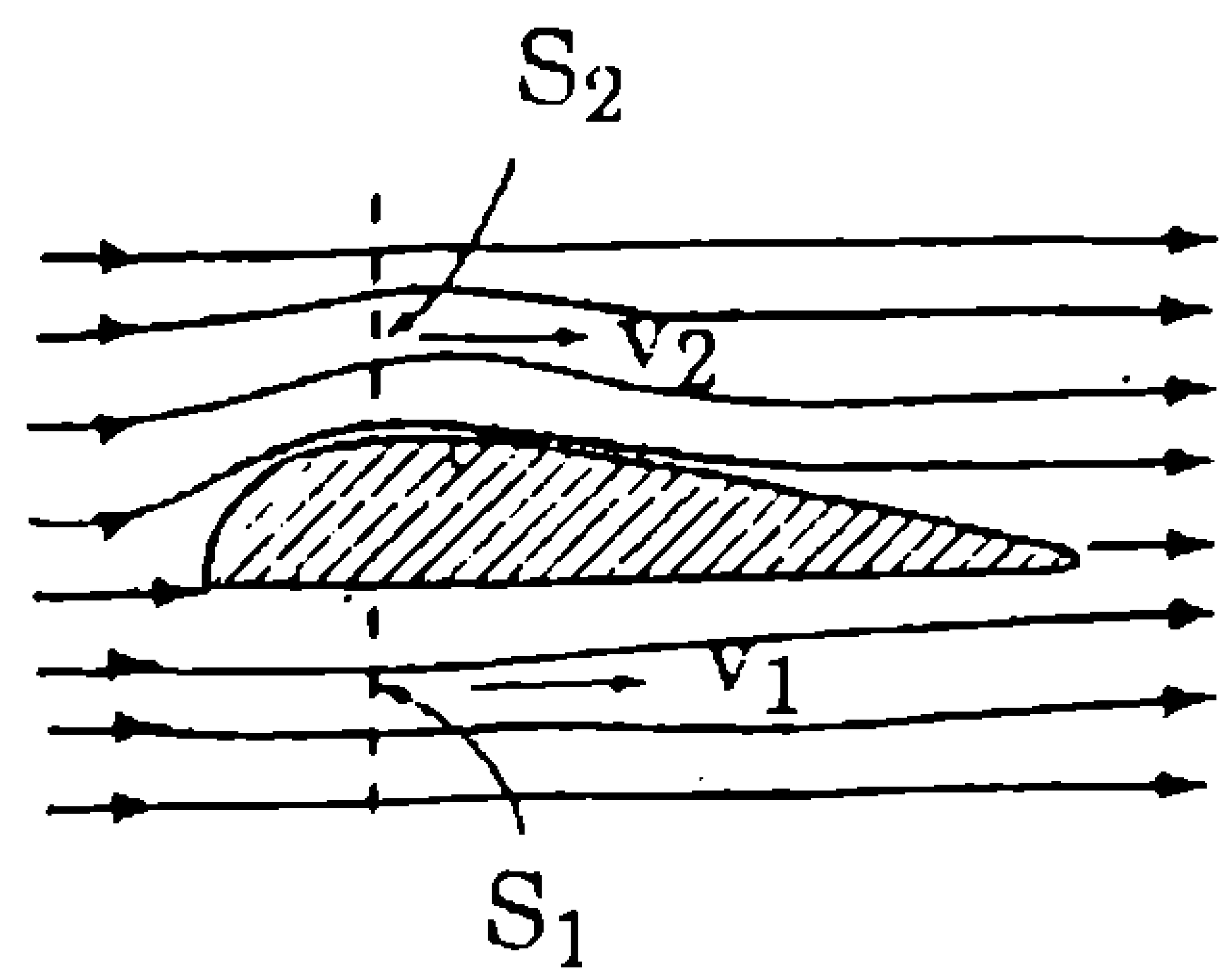


Hình 17-1

Sở dĩ một số hạt thực vật bay được vì chúng có "thiết bị bay lượn". Thiết bị này hoàn thiện hơn tàu lượn do con người tạo ra. Hình 17-1 là quả có cánh của cây thích (acerpalmatum), dưới tác dụng của gió, nó có thể mang những vật thể nặng hơn bản thân nó bay lên.

Trong bạn đọc, chắc có người đã chơi một loại đồ chơi gọi là "chuồn chuồn tre". Đó là một phiến tre vót giống như "chân vịt" của tàu thủy, hình dạng mặt cắt cánh một bên dày một bên mỏng (hình 17-2), ở giữa hai cánh cố định một thanh côn dài 10cm.

Khi chơi, kẹp thanh côn vào giữa lòng bàn tay, dùng sức miết xoắn hai tay khiến cả phiến tre phía trên côn quay gấp. Sau đó, đột ngột thả tay, thế là xuất hiện một kỳ tích: "chuồn chuồn tre" bay lên không trung, càng bay càng cao, mãi tới khi chuyển động chậm lại, mất thăng bằng mới chịu rơi.



Hình 17-2

Vậy, tại sao "chuồn chuồn tre" bay được?

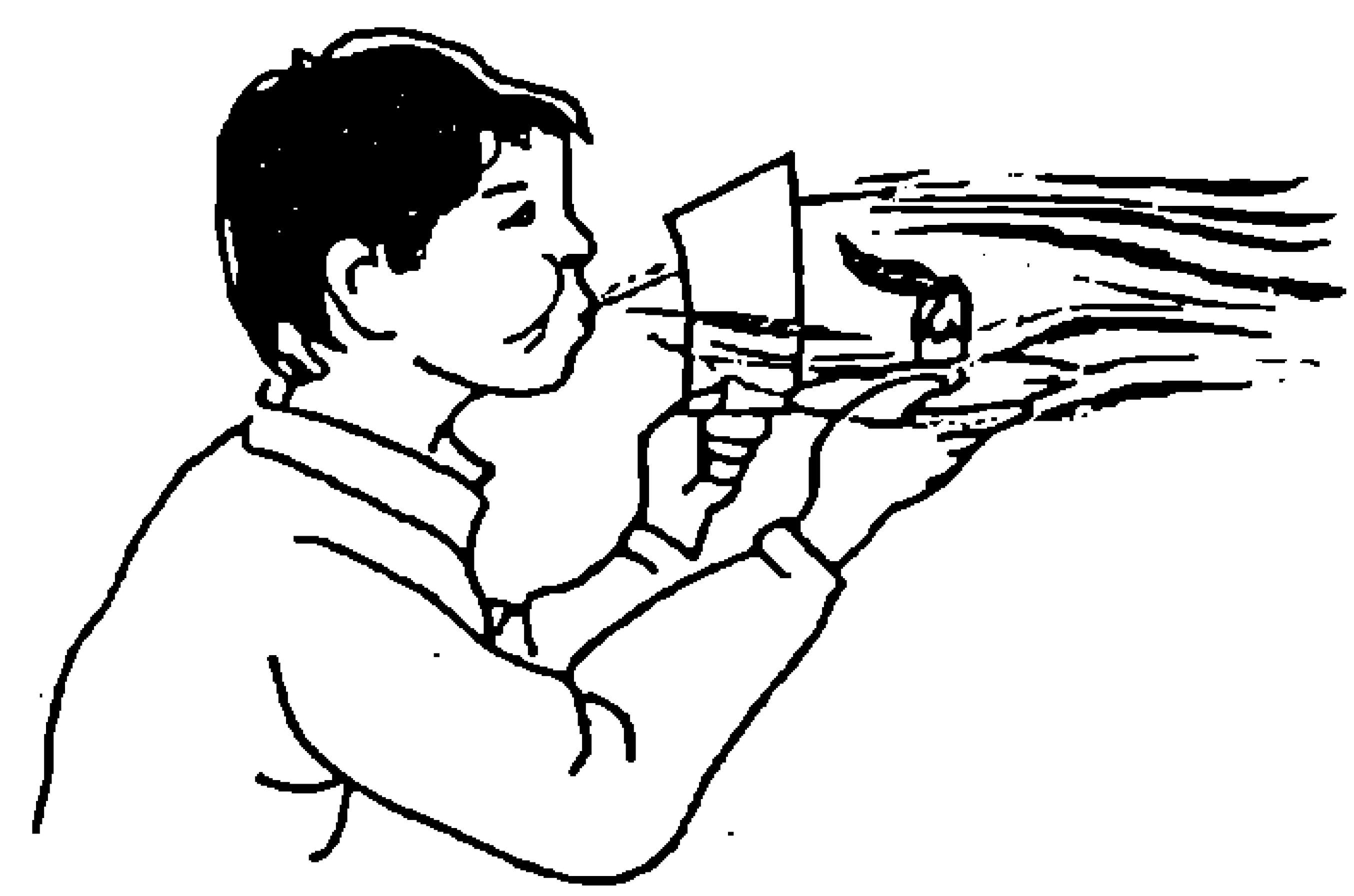
Khi cánh quạt "chân vịt" của "chuồn chuồn tre" quay sẽ sinh ra một lực nâng lên, đỡ thân nó lên không trung. Sự hình thành lực nâng thần kỳ này hoàn toàn do mặt cắt cánh quạt "chân vịt" không đối xứng tạo ra. Khi cánh quay, dòng không khí đồng thời lướt qua cả mặt trên và mặt dưới của cánh. Dòng không khí lướt qua mặt dưới cánh, tốc độ trước và sau cánh không đổi, còn dòng không khí lướt qua mặt trên cánh thì do bộ phận gồ lên của cánh làm cho đường đi của không khí bị ép lại tương đối, do đó tốc độ dòng không khí trở nên lớn tương ứng.

Dựa vào nguyên lý Bernoulli về chuyển động của thể khí, chỗ tốc độ lớn thì cường độ nén tương ứng nhỏ, chỗ tốc độ nhỏ thì cường độ nén tương ứng lớn. Chúng ta đang nói về lực nén mà mặt dưới cánh gánh chịu lớn hơn lực nén mà mặt trên cánh gánh chịu. Sự chênh lệch áp lực này chính là nguyên nhân của lực nâng của "chuồn chuồn tre".

Nhưng khi cánh chuyển động, đồng thời với việc chịu lực nâng, còn chịu lực cản của không khí. Độ lớn của lực cản có quan hệ khăng khít với hình dạng cánh. Sau đây là một thực nghiệm thú vị, giúp bạn đọc hiểu được sâu sắc điều này.

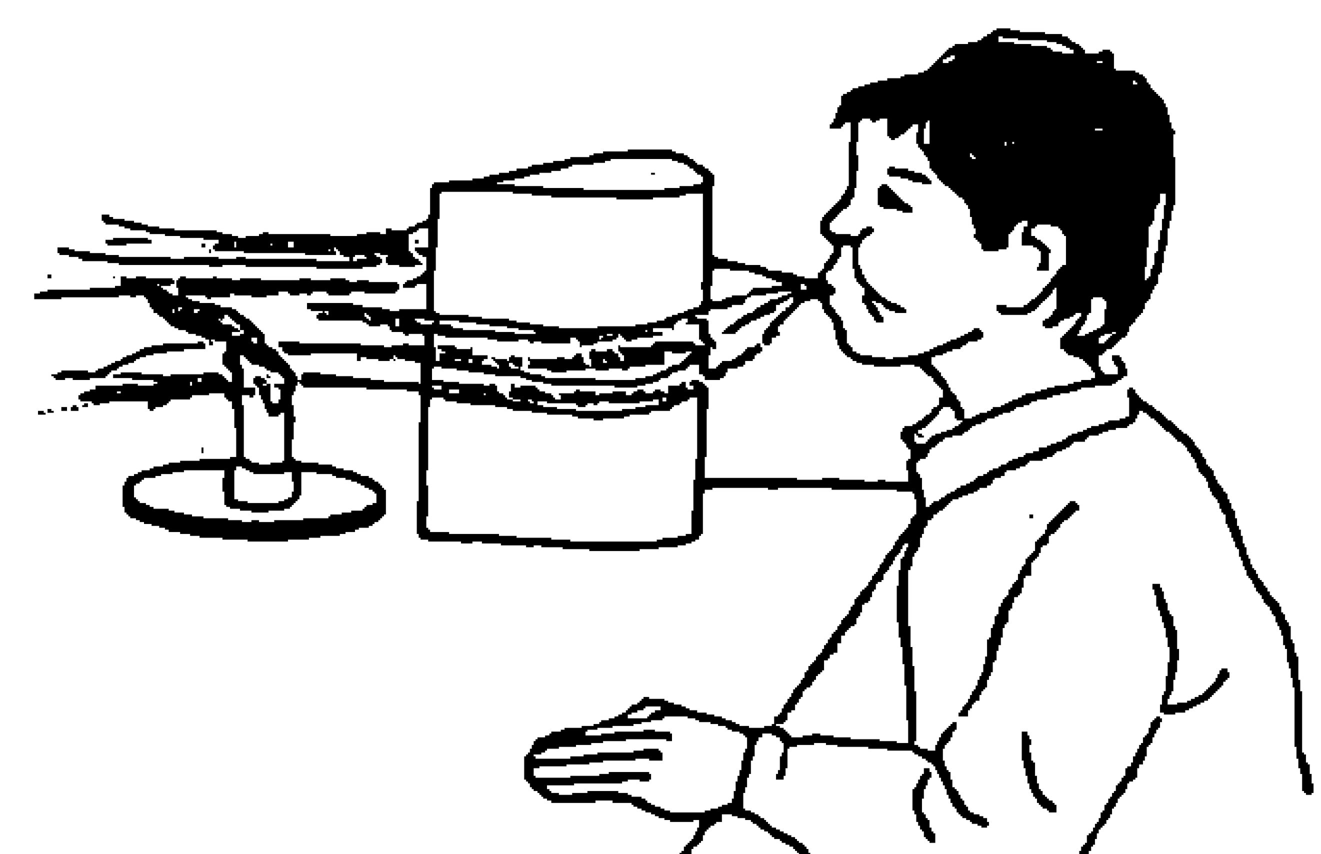
Chúng ta có thể thổi ngọn lửa nến bay nhẹ về phía trước một cách dễ dàng. Tuy vậy, nếu muốn thổi ngọn lửa nến này bay nhẹ về phía ngược lại thì không phải ai cũng làm được. Thậm chí có người không tin là có thể thổi ngọn lửa nến bay nhẹ về phía người thổi! Nhưng điều này hoàn toàn có thể làm được.

Hình 17-3 sẽ mách bạn cách làm. Đặt (che) một mảnh bìa cứng giữa bạn và ngọn lửa nến. Nếu bạn càng thổi mạnh thì ngọn lửa nến bay về phía bạn càng rõ. Bạn hãy thử làm xem.



Hình 17-3

Thực nghiệm ở hình 17-3 chứng tỏ tấm bìa cứng chẳng những cản trở chuyển động hướng chính của dòng không khí, mà còn có thể sinh ra một lực ngược hướng. Nếu ta thay tấm bìa cứng bằng một vật hình thoi giống như hình dạng loài cá thì không khí sẽ chuyển động về phía trước gần như không bị cản trở gì.



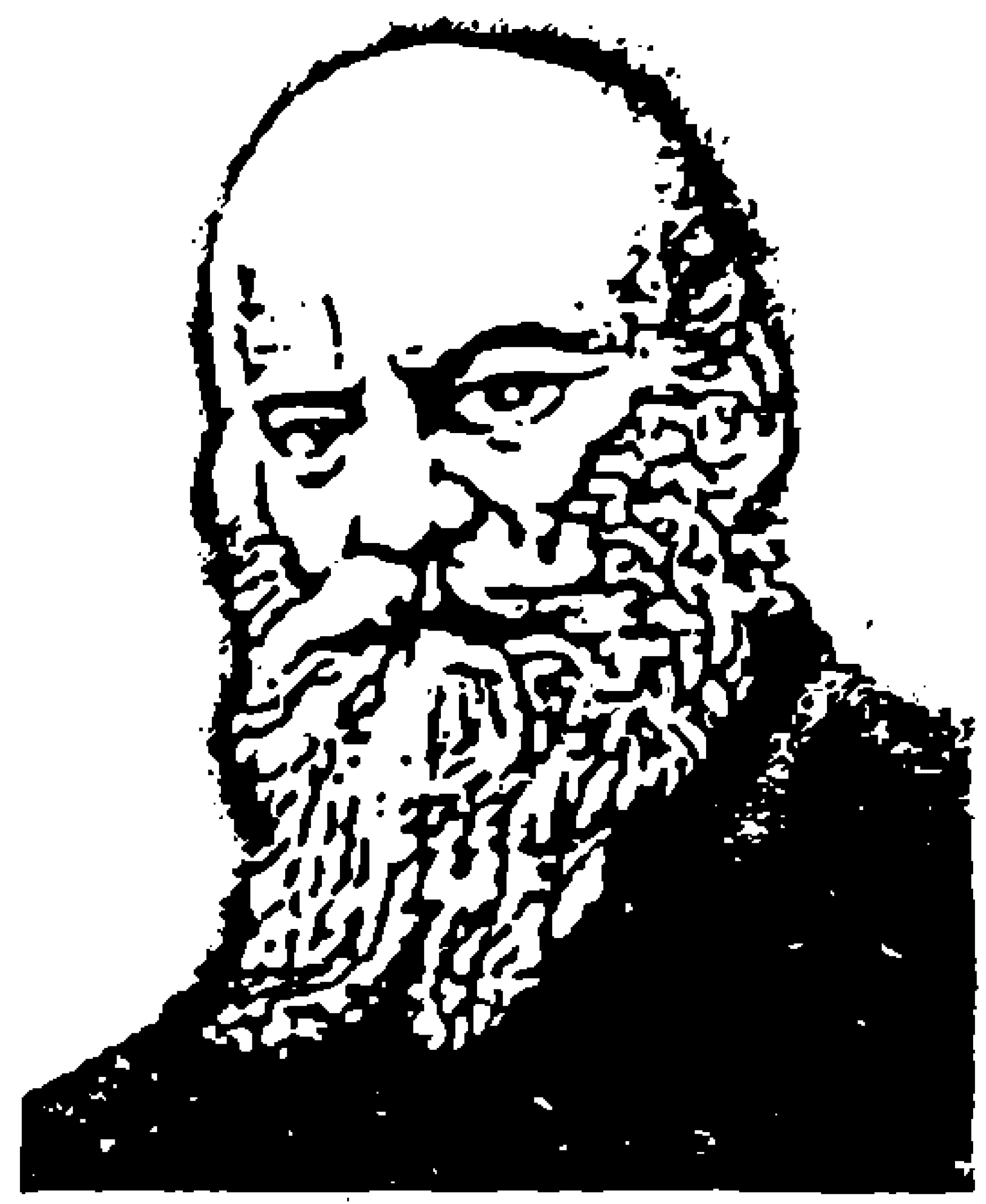
Hình 17-4

Hình 17-4 là một thực nghiệm khác, ở giữa đặt vật cản gần như hình thoi làm bằng giấy, đầu tù hướng về phía người thổi. Bây giờ mặc cho bạn thổi mạnh yếu thế nào thì ngọn lửa nến cũng bay về phía trước.

Sau đây chúng ta sẽ trở lại đề tài ban đầu: Tung cánh bay trên bầu trời bao la. Bạn đọc đã thấy, loài người muốn bay vào bầu trời thì trước tiên cần có cánh máy bay tốt. Cánh máy bay tốt phải đáp ứng được hai yêu cầu: Phải có thể sinh ra một lực nâng đủ và có dạng thuận với dòng không khí, nghĩa là để dòng không khí cản ít nhất, được gọi là dạng khí động học.

Nhưng làm thế nào để đáp ứng được hai yêu cầu này?

Trên con đường chinh phục bầu trời, loài người không thể không cảm ơn công lao của "cha đẻ ngành hàng không Nga" Nicolai Egorovits Jucovxki (17/1/1847 - 17/3/1921). Ông tốt nghiệp ở Đại học Mockva, khoa Toán ứng dụng, lúc còn rất trẻ. Kiến thức của ông uyên bác, nhiều tài năng, có trình độ rất sâu về ngành hàng không.



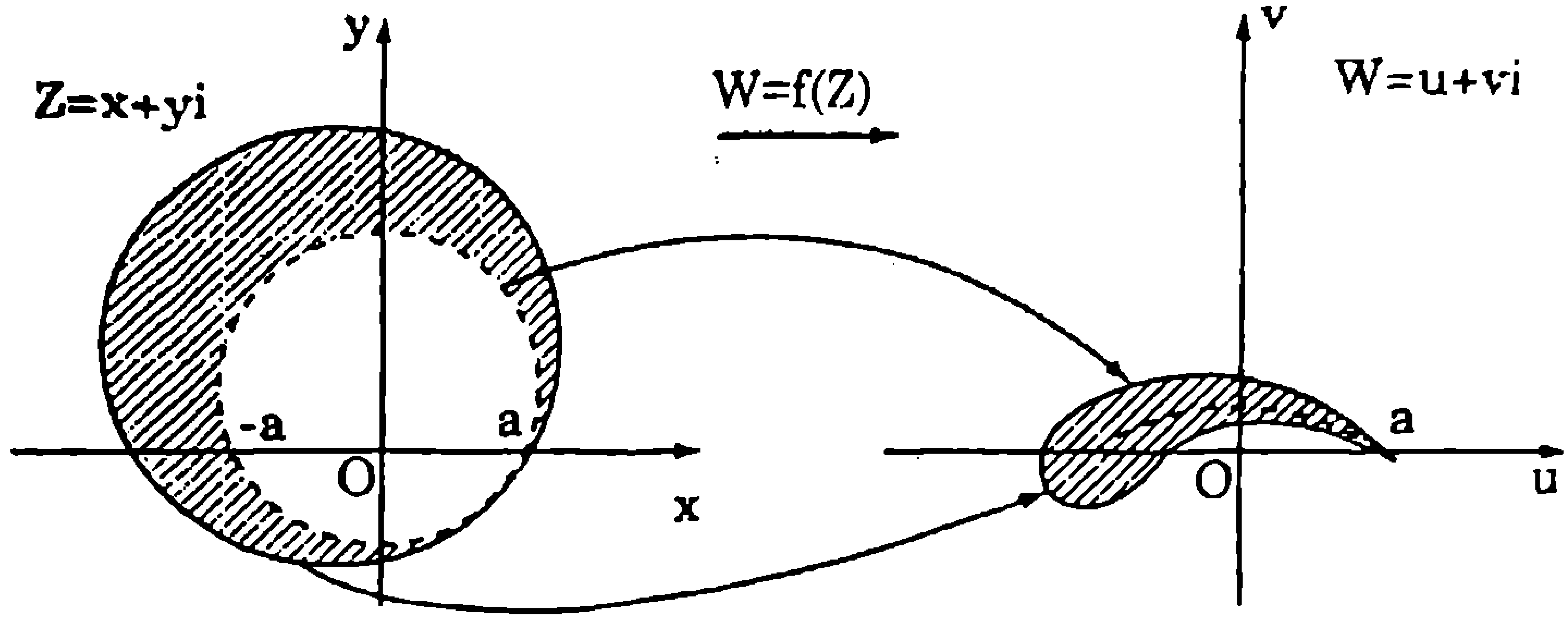
N.E.Jucovxki

Ở thời N.E.Jucovxki, thí nghiệm tàu lượn mới được bắt đầu, tất cả đều mò mẫm tìm tòi dựa vào thực nghiệm. Khi đó rất nhiều nhà khoa học cho rằng: Bạn chỉ có thể tìm chân lý từ những thất bại này đến thất bại khác!

N.E.Jucovxki thì cho rằng, cần phải xây dựng lý thuyết bay. Ông dốc sức vào việc nghiên cứu thể khí chảy vòng, tìm tòi không mệt mỏi suốt mấy chục năm, mãi đến năm 1906 ông mới giải quyết thành công đề tài chủ yếu về khí động học (động lực học không khí), sáng lập nguyên lý lực nâng cánh máy bay, tìm được phương pháp thiết kế loại cánh tốt nhất. Ông khéo léo vận dụng, đưa vào một hàm số biến số phức W:

$$W = f(Z) = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) \qquad (17\text{-}1)$$

trong đó biến số $Z = x + yi$ là số phức.



Hình 17-5

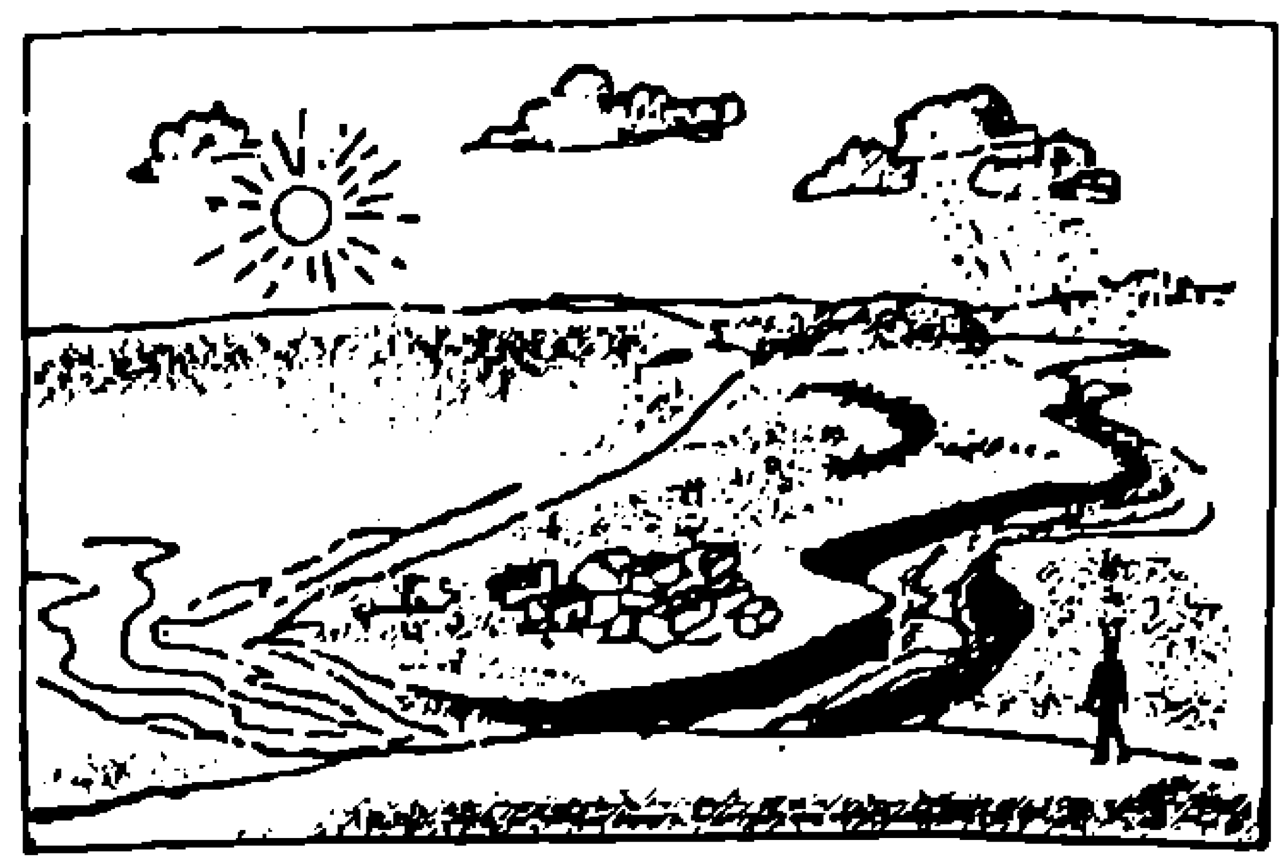
Hàm số (17-1) có thể biến một hình của mặt phẳng Z thành một hình khác của mặt phẳng W (W = u + vi) (hình 17-5).

N.E.Jucovxki đã chứng minh được rằng, trên mặt phẳng Z, đường tròn tiếp xúc với đường tròn, qua hàm số (17-1) sẽ biến thành tiết diện kiểu cánh máy bay trên mặt phẳng W, từ đó cung cấp các số liệu cho thiết kế các hình dạng cánh tốt, tránh phải tìm tòi trong thực tiễn.

Thành quả về các công trình nghiên cứu khoa học của cả đời N.E.Jucovxki thì rất nhiều. Các luận văn, như "Về lý thuyết bay" công bố từ các năm 1890, 1891 đã dự báo khả năng của sự lộn nhào trong khi bay. Năm 1906, đang lúc công bố bài "Bàn về nối liền dòng xoáy" có tính nền móng, dự báo của ông đã được thực hiện: Một trung uý lục quân Nga (Netsierov) hoàn thành biểu diễn kỹ thuật đặc biệt, nhào lộn trong không trung lần đầu tiên trên thế giới.

Năm 1921, V.I.Lenin (22/4/1870 - 21/1/1924) đã ra lệnh tôn N.E.Jucovxki là "Cha đẻ của ngành hàng không Nga" để tuyên dương công lao to lớn của N.E.Jucovxki đối với ngành hàng không Nga.

18. ĐƯỜNG CONG HÌNH SIN



Dưới ngòi bút của các nhà văn, các mô thức tuần hoàn cũng được mô tả tinh xảo.

Có một câu chuyện đơn giản, nhà văn đã mô tả như sau: "Trước kia có một quả núi, trên núi có một cái miếu, ở miếu có một lão hoà thượng và một tiểu hoà thượng. Một hôm lão hoà thượng nói với tiểu hoà thượng rằng: "Trước kia có một quả núi, trên núi có một cái miếu, ở miếu có một lão hoà thượng và một tiểu hoà thượng. Một hôm...". Không cần viết tiếp thì bạn đọc cũng biết được câu chuyện này sẽ tiếp tục thế nào.

Một câu chuyện tuần hoàn khác, nói về kỳ ngộ của một giọt nước: "Có một giọt nước vui vẻ ca hát trên biển cả, dưới ánh nắng Mặt Trời sẽ biến thành sợi hơi nước bồng bềnh bay lên cao. Ở đó nó hợp cùng nghìn vạn sợi nước khác giống như nó, gom lại thành mây. Mây tung bay theo gió, bay đến bầu trời trên đất liền. Đang lúc say sưa với cuộc du lịch hấp dẫn, một luồng khí lạnh vỗ mặt lạnh đến nỗi nó vội vàng co lại bám vào những hạt bụi đang trôi nổi, rồi biến thành hạt mưa rơi xuống mặt đất. Các hạt mưa này tay cầm tay nhảy nhót hội tụ về suối, rồi đổ ra sông và từ sông chảy ra biển cả. Ở đây các giọt nước lại vui vẻ ca hát như xưa...".

Các giọt nước đã tuần hoàn như vậy hàng mấy trăm triệu năm và còn tiếp tục tuần hoàn mãi.

Các nhà toán học không quan tâm nhiều đến sự miêu tả của các nhà văn, trong con mắt họ sự kiện y xuất hiện đều là hàm số của x:

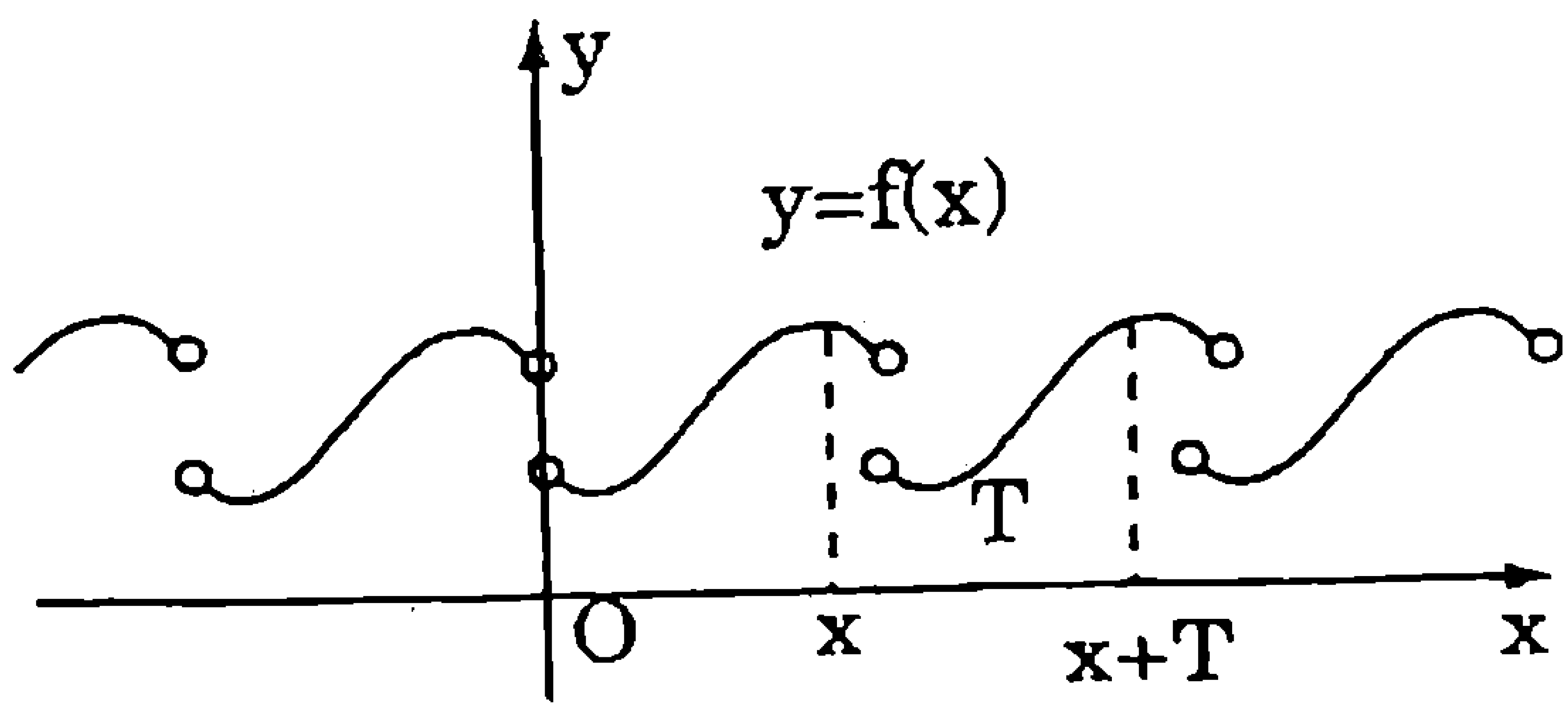
$$y = f(x) \tag{18-1}$$

Đối với hàm số tuần hoàn, tồn tại một đại lượng không đổi T, khiến cho

$$f(x + T) = f(x) \tag{18-2}$$

trong đó T được gọi là chu kỳ.

Biểu thức (18-2) chứng tỏ rằng, sự kiện như nhau, sau khi trải qua một chu kỳ T lại trở về trạng thái ban đầu (hình 18-1).

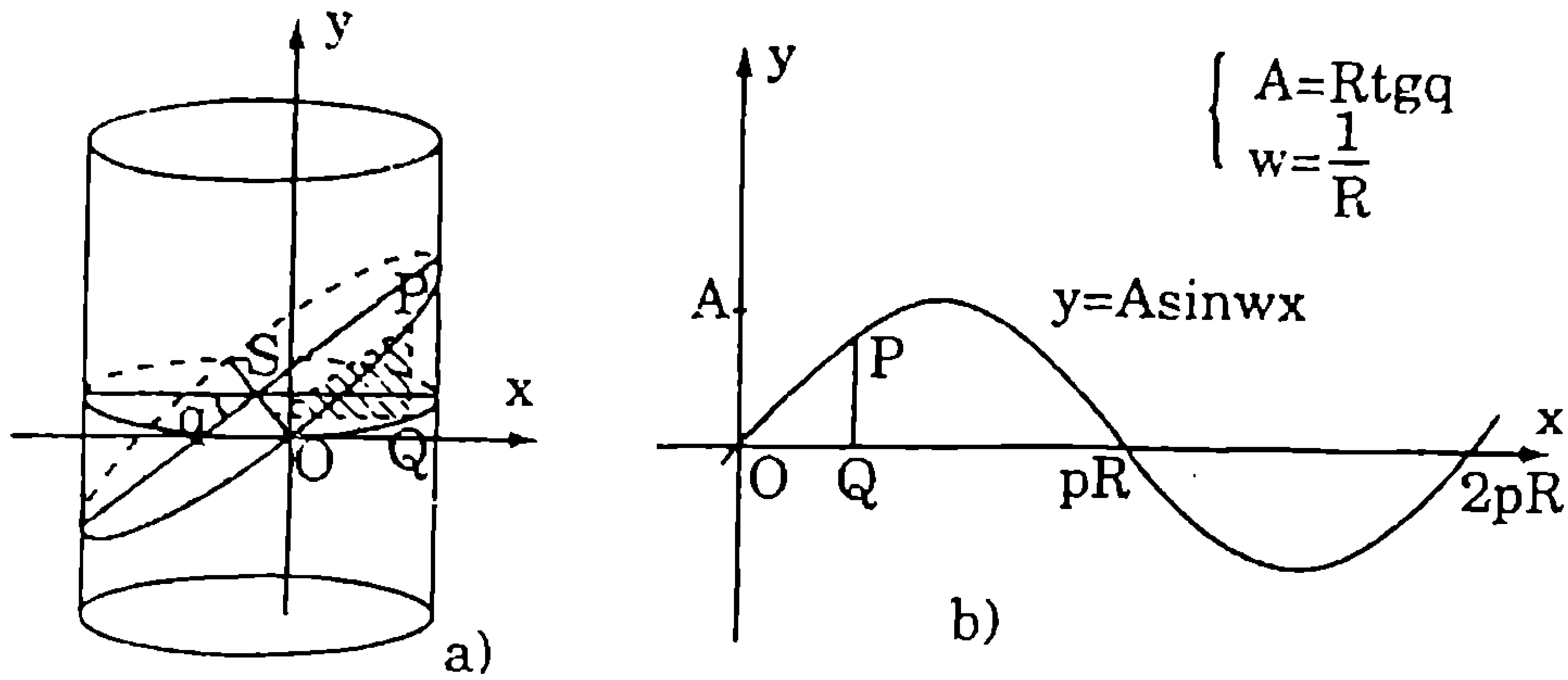


Hình 18-1

Cuốn một tờ giấy lên cây nến, nếu cắt đứt chéo cây nến, mở tờ giấy ra bạn sẽ thấy vết cắt hình sóng lượn (hình 18-2). Chúng ta hãy xem đây là đường cong như thế nào?

Hình 18-2

Coi khúc nến là hình trụ tròn có bán kính đáy R, tâm vết cắt là S. Qua S vẽ một mặt cắt vuông góc với trục của hình trụ tròn, mặt cắt này sẽ giao với đường cong vết cắt cũ tại hai điểm. Lấy một trong hai điểm đó làm điểm gốc O. Qua O và trong mặt phẳng tiếp xúc với hình trụ tròn, dựng một hệ tọa độ vuông góc xOy sao cho Oy là một đường sinh của hình trụ tròn. Dĩ nhiên Ox tiếp tuyến với hình trụ tròn (hình 18-3a).



Hình 18-3

Gọi P là một điểm trên đường cong của lát cắt, Q là hình chiếu của nó trên đường tròn S, góc OSQ là α, ta có:

$$\begin{cases} x = \overset{\frown}{OQ} = \alpha R \\ y = PQ = (R\sin\alpha)\mathrm{tg}\theta \end{cases} \quad (18\text{-}3)$$

trong đó θ - góc giữa tiết diện nghiêng với mặt phẳng đường tròn S, là đại lượng không đổi.

Biểu thị đại lượng biến đổi y thành hàm số của đại lượng biến đổi x, ta có (hình 18-3b):

$$y = (R\mathrm{tg}\theta)\sin\left(\frac{1}{R}x\right) \quad (18\text{-}4)$$

Gọi $A = R\operatorname{tg}\theta$; $\omega = \frac{1}{R}$, ta được:

$$y = A\sin\omega x \qquad (18\text{-}5)$$

Hàm số (18-5) chính là hàm số của đường cong hình sin có biên độ A, tần số ω. Dễ hiểu rằng, khi tờ giấy bắt đầu từ O, mở ra một vòng lại trở về O, hoàn thành tuần hoàn một chu kỳ T bằng chiều dài chu vi của đường tròn S:

$$T = 2\pi R = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (18\text{-}6)$$

Công thức (18-6) rất hữu dụng đối với việc tìm chiều dài của đường hình sin.

Trong tự nhiên, đường cong hình sin rất nhiều. Ném một hòn đá xuống hồ nước, sóng nước hình tròn mở rộng ra xung quanh; hoặc cầm một đầu của sợi dây dài, lắc lên lắc xuống, bạn có thể thấy từng đợt sóng xô ra phía trước, cho dù đầu dây cầm lắc kia đã ngừng lắc, hình sóng vẫn tiếp tục truyền ra xa. Tương tự như vậy là tiết mục múa với dải lụa.

Trong con mắt của các nhà toán học, những hiện tượng nói trên được gọi là sự truyền sóng. Và các nhà toán học đã dùng hàm số biểu thị một cách tài tình những hiện tượng này.

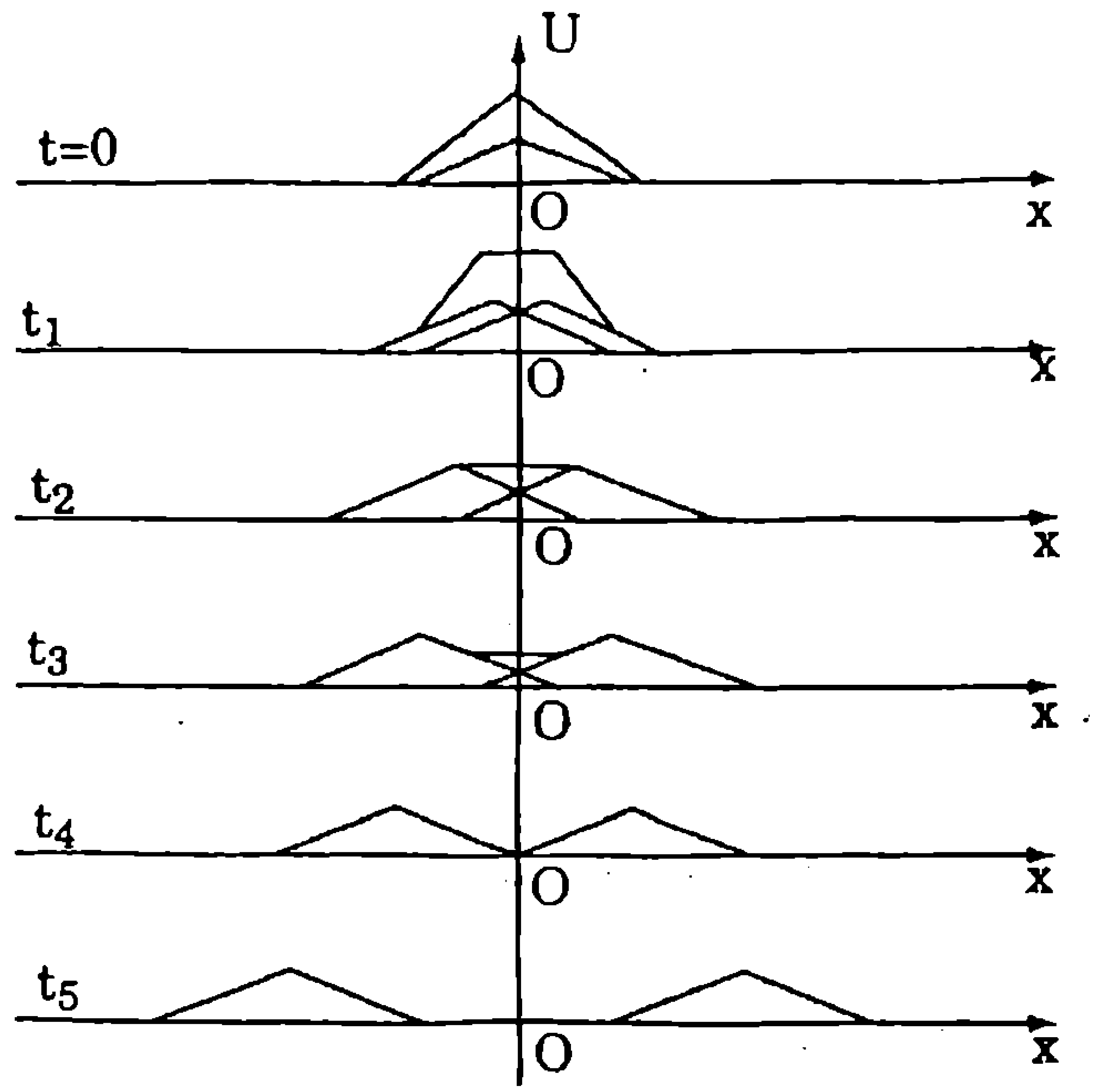
Hình 18-4 là một ví dụ của sự truyền sóng. Đây là đường cong của sự rung động của dây cung. Ban đầu, khi t = 0 dây cung đứng yên, sau đó cho nó một chuyển vị ban đầu. Gọi hàm số chuyển vị ban đầu là f(x), ta có:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \qquad (18\text{-}7)$$

Biểu thức hàm số biểu thị sự truyền sóng ở hình 18-4 có thể viết là:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+vt)+f(x-vt)] \tag{18-8}$$

trong đó v - tốc độ truyền sóng.

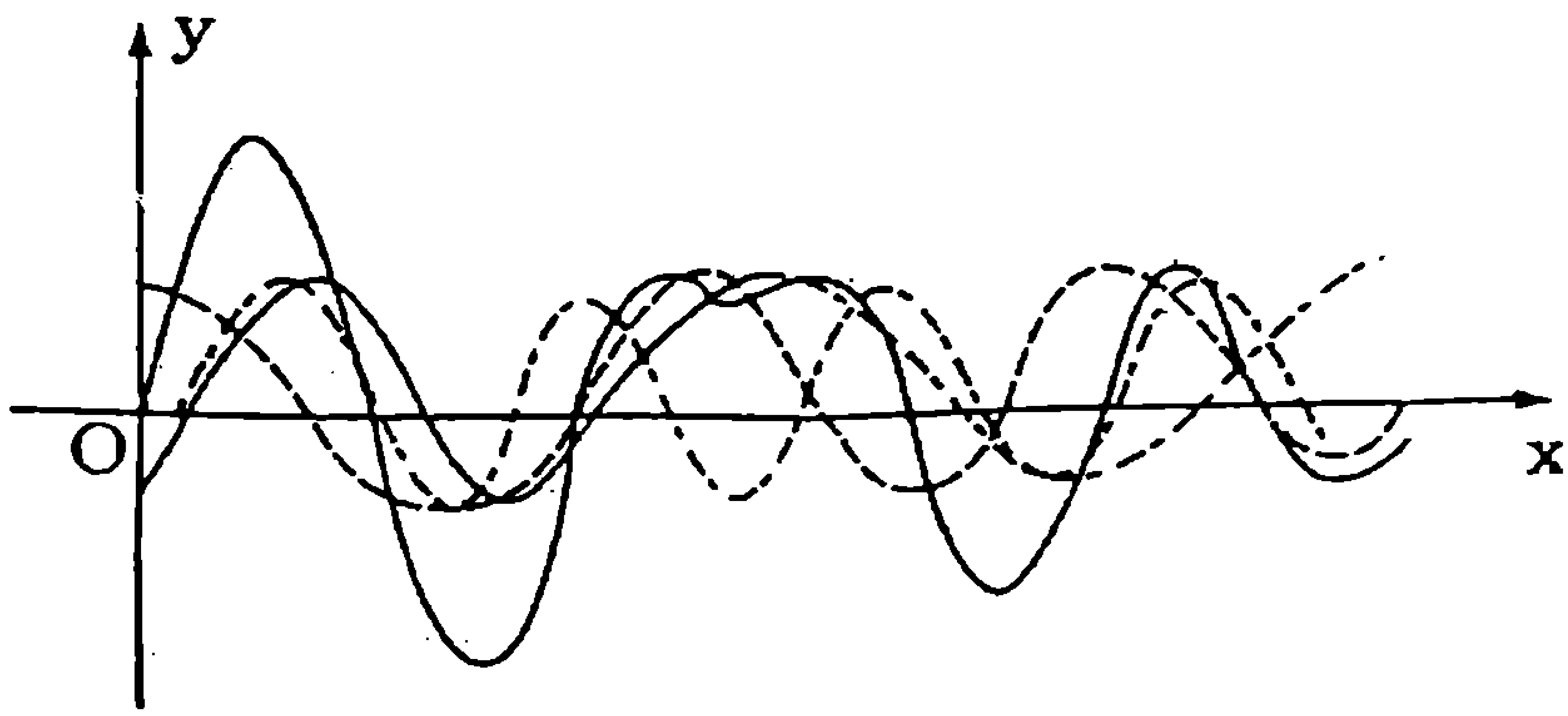


Hình 18-4

Tuy vậy, bạn đọc cần nhớ rằng: Phần nhiều các sóng chưa chắc đã là sóng hình sin.

Năm 1822, nhà toán học Jean Baptiste Joseph Baron Fourier (21/3/1768 - 16/5/1830) người Pháp đã chứng minh rằng, bất cứ đường cong nào cũng có thể do nhiều đường cong hình sin cộng chồng mà nên, thậm chí ông còn tìm được phương pháp cộng chồng. Nhờ công việc xuất sắc của J.B.J.B.Fourier mà một nhánh toán học cận đại được đặt tên theo tên của ông.

Nét đậm ở hình 18-5 là một đường cong khá phức tạp, nó do ba đường cong hình sin đơn giản có biên độ giống nhau cộng chồng lên mà thành.



Hình 18-5

19. NHỮNG GỢI Ý VỀ PHÉP ĐỐI XỨNG

Ta nói về một trò chơi có nhiều thú vị.

Lấy một cỗ bài tulơkhơ đã bỏ hai quân Joker. Sau khi tráo (xóc) bài, mời hai khán giả mỗi người rút một quân bài và dấu kín. Bạn "xử lý" các quân bài còn lại trước công chúng. Khán giả sẽ rất kinh ngạc khi bạn đoán ra số của hai quân bài đang nằm trong tay (hoặc túi) của hai khán giả.

Lý thuyết của trò chơi này rất đơn giản. Muốn làm rõ điều huyền diệu trong đó, trước tiên hãy nói về "đối ngẫu".

Coi quân bài A là số "1"; J, Q, K là các số "11", "12", "13". Thế là tất cả các quân bài có thể xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K.

Mười ba quân bài có số khác nhau này lập nên trạng thái đối xứng qua số "7": hai quân bài có cùng khoảng cách đến số "7" thì có tổng bằng 14. Ta gọi các nhóm quân bài như thế là "đối ngẫu" với nhau. Trong cỗ bài tulơkhơ có 7 nhóm quân bài "đối ngẫu":

(A, K), (2, Q), (3, J), (4, 10), (5, 9), (6, 8) và (7, 7).

Bây giờ ta trở lại với trò chơi ban đầu. Bước mấu chốt là "xử lý" các quân bài: Lật ngửa từng quân bài lên bàn, khi thấy quân bài trên tay bạn "đối ngẫu" với quân bài nào đó trên bàn thì dùng quân bài trên tay đè lên quân bài "đối ngẫu" đó. Cứ làm như vậy cho tới khi hết bài trên tay. Cuối cùng, từ hai quân bài còn lại (chưa có "đối ngẫu"), chắc chắn bạn sẽ đoán được hai quân bài ở hai khán giả (căn cứ vào 7 nhóm "đối ngẫu"). Chỉ có một trường hợp ngoại lệ là, không còn quân bài nào thừa nữa (các quân bài đã có "đối ngẫu"). Điều này chứng tỏ hai quân bài ở hai khán giả là "đối ngẫu". Vì vậy, bạn có thể khẳng định rằng: tổng số trên hai quân bài đó bằng 14.

Thủ pháp "xử lý" các quân bài nói trên, đối với người mới học, ban đầu có thể hơi chậm nhưng sau khi mắt và tay phối hợp thành thạo thì làm rất nhanh, làm cho khán giả không theo dõi kịp. Khi mọi người đang ngơ ngác với tình cảnh đó thì thành công của bạn là điều dễ thực hiện được.

Lý thuyết của trò chơi này đơn giản tới mức không thể đơn giản hơn được nữa, chỉ là khán giả tạm thời chưa biết mà thôi. Trên thực tế phương pháp được sử dụng chỉ là "đối ngẫu". Phương pháp này xuất hiện đã mấy nghìn năm. Khi lần đầu tiên người ta tính diện tích hình thang đã sử dụng phương pháp này.

Cũng sử dụng phương pháp này mà cách đây hơn hai thế kỷ, cậu bé 9 tuổi C.F.Gauss đã trả lời câu hỏi của thầy giáo về tổng các số từ 1 đến 100 là 5050. Thầy giáo rất ngạc nhiên về câu trả lời nhanh và chính xác của C.F.Gauss. Hoá ra C.F.Gauss đã xếp 100 số này thành 50 cặp "đối ngẫu" là (1, 100), (2, 99), ... mà tổng của mỗi cặp là 101 vậy thì tổng của 100 này là

$$50 \times 101 = 5050$$

Năm 1796, cũng chính C.F.Gauss (lúc 19 tuổi) đã dựng được đa giác đều 17 cạnh bằng thước thẳng và compa[1]. Đồng thời, ông đã chứng minh được rằng, đa giác đều n cạnh dựng được bằng thước thẳng và compa khi và chỉ khi

$$n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k \qquad (19\text{-}1)$$

trong đó n là số nguyên ≥ 3;

m và k là hai số nguyên ≥ 0;

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ là những số nguyên tố phân biệt dạng $2^{2^s} + 1$ (p_i được gọi là số nguyên tố Fermat, s là số nguyên ≥ 0).

---

[1] Năm 1909, H.W.Richmond đã dựng đơn giản hơn.

Chẳng hạn, khi m = 0 và

s = 0 thì n = 3 (3 cạnh)

s = 1 thì n = 5 (5 cạnh)

s = 2 thì n = 17 (17 cạnh).

Trong các đa giác đều có số cạnh n < 100 có tất cả 24 hình có thể dựng được bằng thước thẳng và compa ứng với n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96.

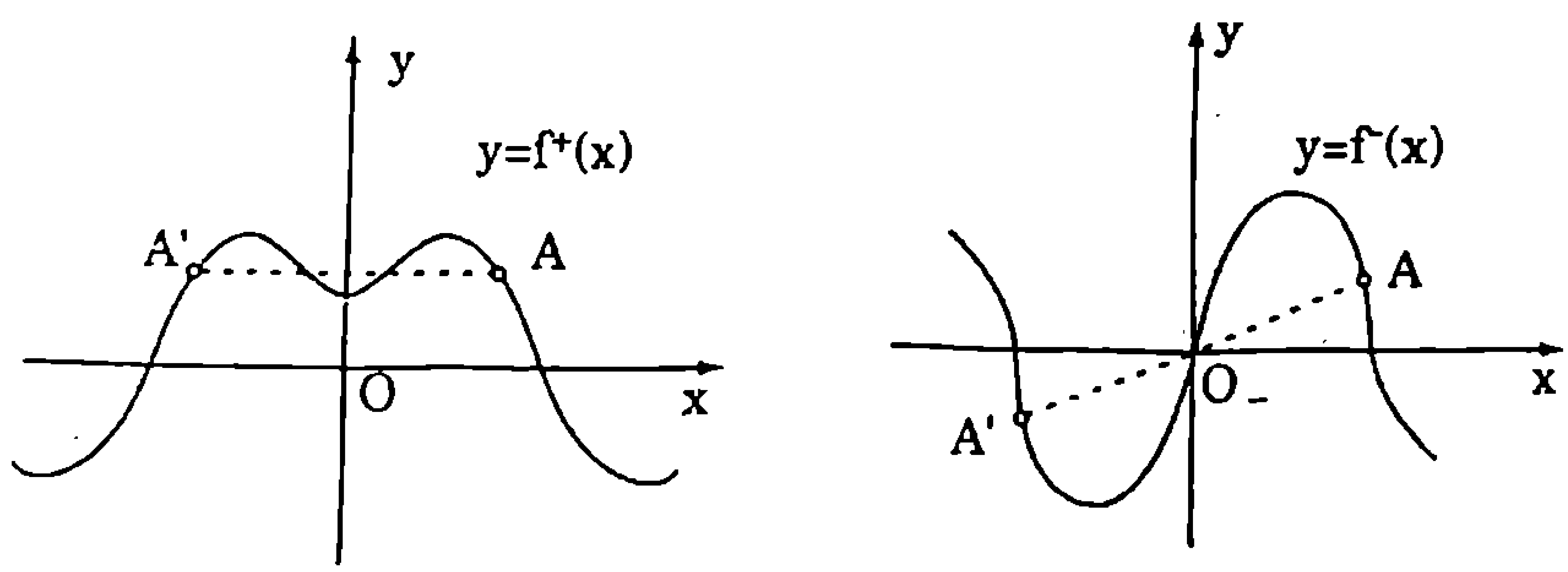
Cống hiến này của C.F.Gauss đã giải quyết được sự phỏng đoán: "Đa giác đều mà số cạnh n lớn hơn số nguyên tố 5 thì không thể dựng được bằng thước thẳng và compa" đã tồn tại gần hai nghìn năm.

Biểu thức của các hàm số có đồ thị đối xứng như sau:

$$f^{+}(-x) = f^{+}(x) \qquad (19\text{-}2)$$

$$f^{-}(-x) = f^{-}(x) \qquad (19\text{-}3)$$

Biểu thức (19-2) biểu thị hàm số chẵn, đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy (hình 19-1a); biểu thức (19-3) biểu thị hàm số lẻ, đồ thị của nó đối xứng qua điểm gốc O (hình 19-1b).



a) *b)*

Hình 19-1

Từ xưa đến nay loài người đã quan tâm đặc biệt tới sự đối xứng.

Trong thế giới muôn màu, có muôn vàn dáng vẻ nhưng có lẽ cũng không tách khỏi sự hài hoà của đối xứng. Sự thực là bất kỳ một đồ thị nào cũng đều có thể coi là tổng của một hình đối xứng trục và một hình đối xứng tâm. Điều này được chứng minh không khó bằng hình học. Diễn đạt điều này bằng ngôn ngữ đại số như sau: Bất kỳ một hàm số f(x) nào cũng đều có thể biểu thị bằng tổng của một hàm số chẵn $f^+(x)$ và một hàm số lẻ $f^-(x)$, tức là:

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x) \tag{19-4}$$

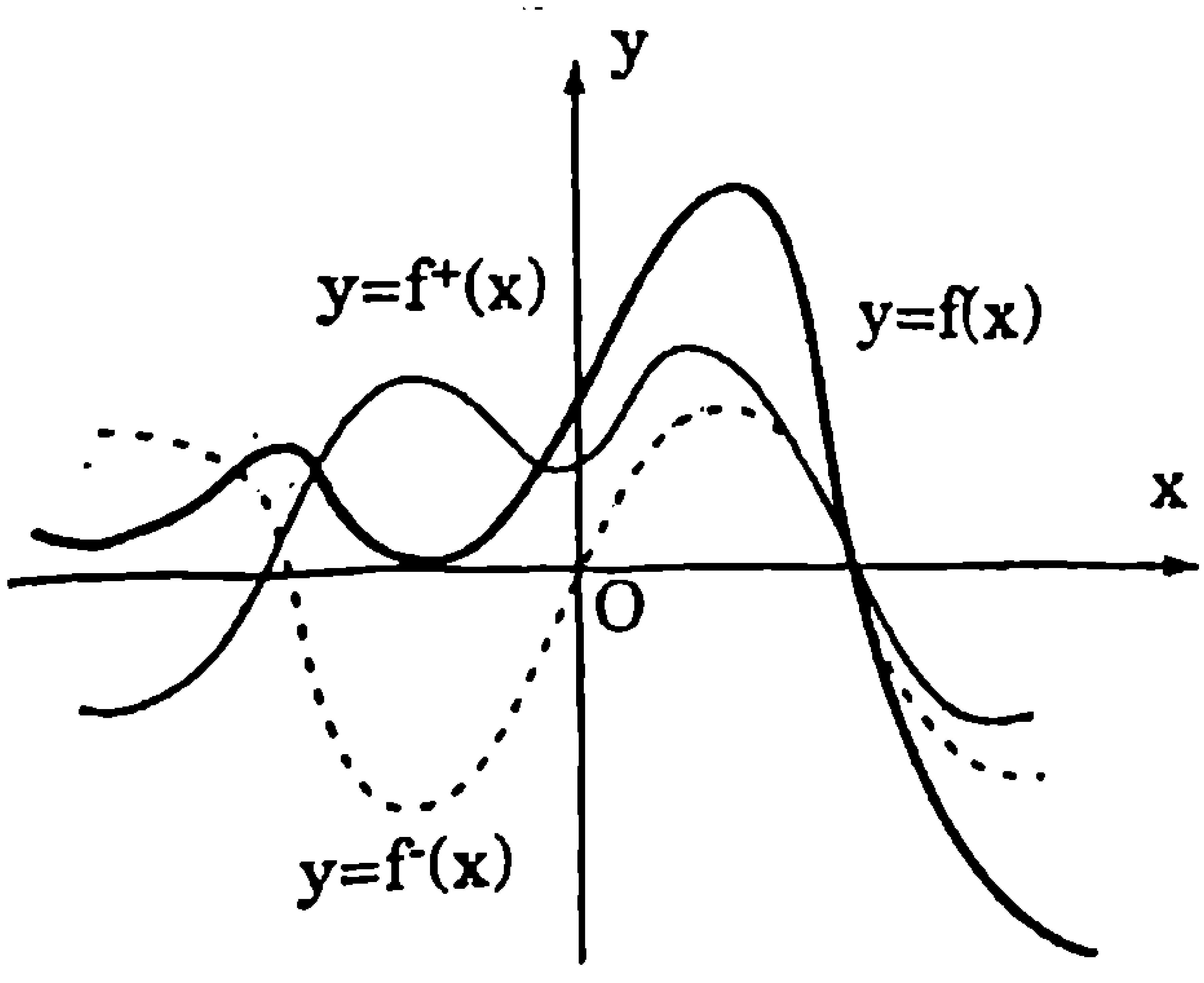
Thật vậy, giả sử có (19-4), khi đó từ (19-3), ta có:

$$f(-x) = f^+(-x) + f^-(-x) = f^+(x) - f^-(x) \tag{19-5}$$

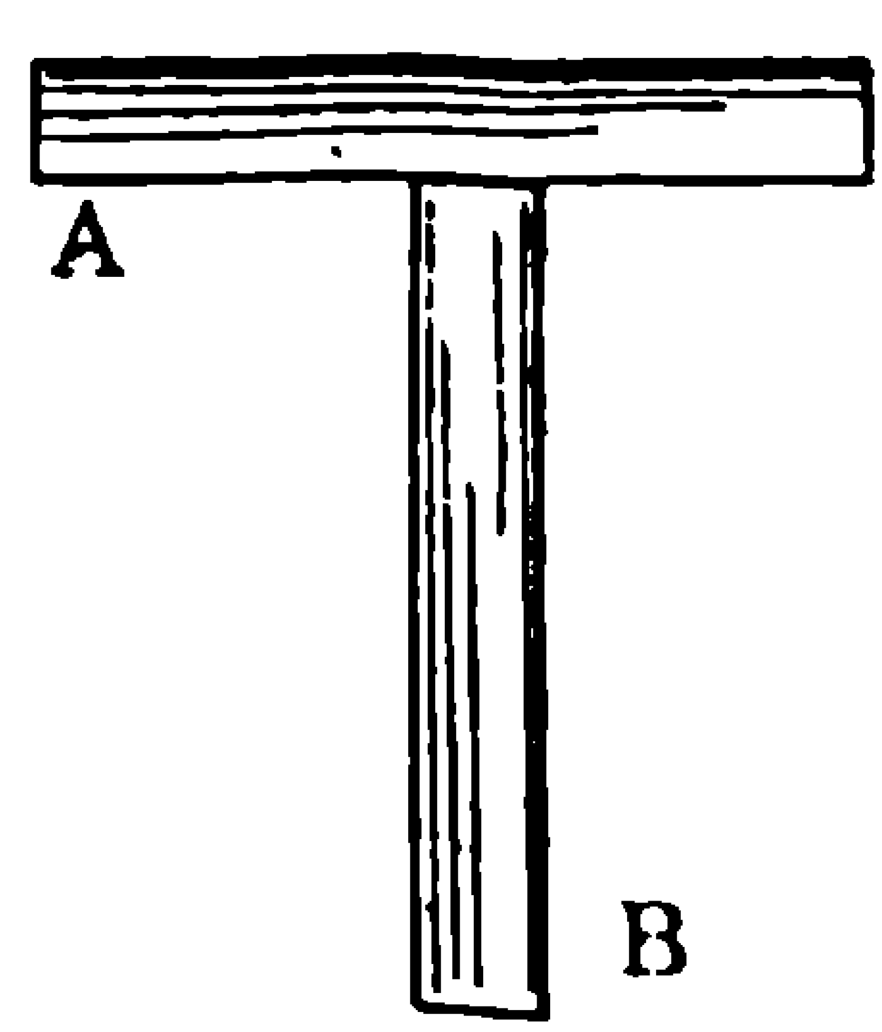
Từ đó xác định được:

$$\begin{cases} f^+(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ f^-(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases} \tag{19-6}$$

Hàm số f(x) thể hiện bằng nét liền đậm ở hình 19-2 là do hàm số lẻ thể hiện bằng nét đứt và hàm số chẵn thể hiện bằng nét liền mảnh cộng với nhau mà có.



Hình 19-2



Hình 19-3

Thế kỷ XIV, nhà triết học Brotan người Pháp đã viết câu chuyện lý thú như sau: Một con lừa bụng đói cồn cào, đến giữa hai bó cỏ khô. Do hai bó cỏ khô hoàn toàn giống nhau và ở vào vị trí đối xứng hai bên con lừa mà con lừa lại không có cách gì để định xem ăn bó nào trước, nên cuối cùng đã chết đói!

Câu chuyện ngụ ngôn này mách bảo chúng ta, tâm đối xứng hoặc trục đối xứng có một vị trí vô cùng đặc biệt đối với hình đối xứng. Vị trí này thường có tác dụng then chốt khi xét hình.

Sau đây là một vấn đề cần suy nghĩ bằng trí tuệ tuyệt vời: A và B là hai thanh thép có cùng hình dáng và trọng lượng, trong đó có một thanh nhiễm từ. Nếu không dùng các vật khác ngoài hai thanh thép, làm thế nào để có thể biết được thanh nào nhiễm từ?

Hình 19-3 thể hiện hai thanh thép xếp thành hình chữ "T". Cách xếp đối xứng này, trên thực tế đã cho lời đáp. Sự xác định cụ thể tiếp theo dành cho bạn đọc.

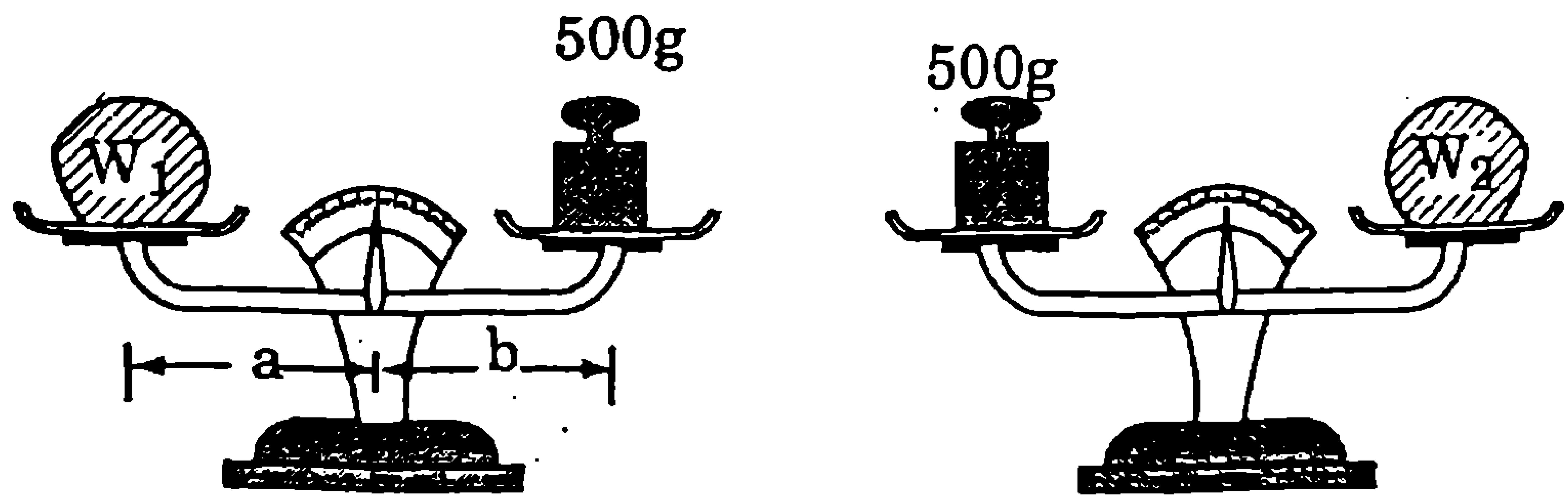
Sự gợi mở của đối xứng, thường sinh ra những hiệu quả không ngờ tới. Hãy xem ví dụ sau đây.

Cân đĩa của cửa hàng bán đường ăn bị hỏng, người phụ trách cửa hàng quyết định không bán lẻ đường nữa. Nhưng có một khách hàng đến, cần gấp 1kg đường. Người bán hàng không biết giải quyết cách nào. Sau đó người bán hàng đành làm như sau: Lần thứ nhất, đĩa cân bên phải đặt quả cân 500g, đĩa cân bên trái đặt đường để thăng bằng. Lần thứ hai, đĩa cân bên phải đặt đường, đĩa cân bên trái đặt quả cân 500g, cũng để thăng bằng. Người bán hàng nghĩ: cân đã không chuẩn xác, hai lần cân không bằng nhau, như vậy đường cân ra của hai lần nhất định có một lần nhiều hơn 500g một chút, một lần ít hơn 500g một chút, nhưng hai lần gộp lại, lấy nhiều bù ít có lẽ phải là 1000g, tức là 1kg! Thế là người bán hàng thu tiền 1kg đường.

Nhưng vị khách hàng ấy lại là người chịu khó suy nghĩ. Khi anh ta nhìn cách làm của người bán hàng, suy nghĩ giây lát rồi bảo với người bán hàng đã thu thiếu tiền, vì đường đã cân nhiều hơn 1kg. Bạn có biết vị khách hàng trung thực đó làm thế nào để đưa ra kết luận đó không?

Hoá ra anh ta dựa vào nguyên lý cánh tay đòn. Từ hai lần cân đó (hình 19-4) được biểu thức quan hệ của đối xứng:

$$\begin{cases} W_1 a = 500b \\ W_2 b = 500a \end{cases} \tag{19-7}$$



Hình 19-4

Từ (19-7), ta có:

$$W_1 + W_2 = 500\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 500 \times 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = 1000$$

Nhưng vì $a \neq b$, nên $W_1 + W_2 > 1000$.

Nếu bạn đọc chịu khó suy nghĩ thì có thể tìm được cách cân đường thông minh hơn: Trước tiên lấy W_0g đường thăng bằng với quả cân 1000g, sau đó lấy quả cân ra đổi thành Wg đường, cũng thăng bằng với W_0g. Rõ ràng là có W = 1000. Cách cân này vừa nhanh vừa chuẩn xác, thích cân bao nhiêu đường cũng có thể cân được.

Một cách khác có thể cân chuẩn xác trọng lượng W đường. Cách làm là: đặt Wg đường vào đĩa cân bên phải để cân được trọng lượng là Pg, rồi lại đặt Wg đường lên đĩa cân bên trái và lại cân được trọng lượng là Qg. Do cân không chuẩn xác, cho nên trị số P và Q rõ ràng đều không bằng W. Song, chúng ta lại có thể được một cách chuẩn xác:

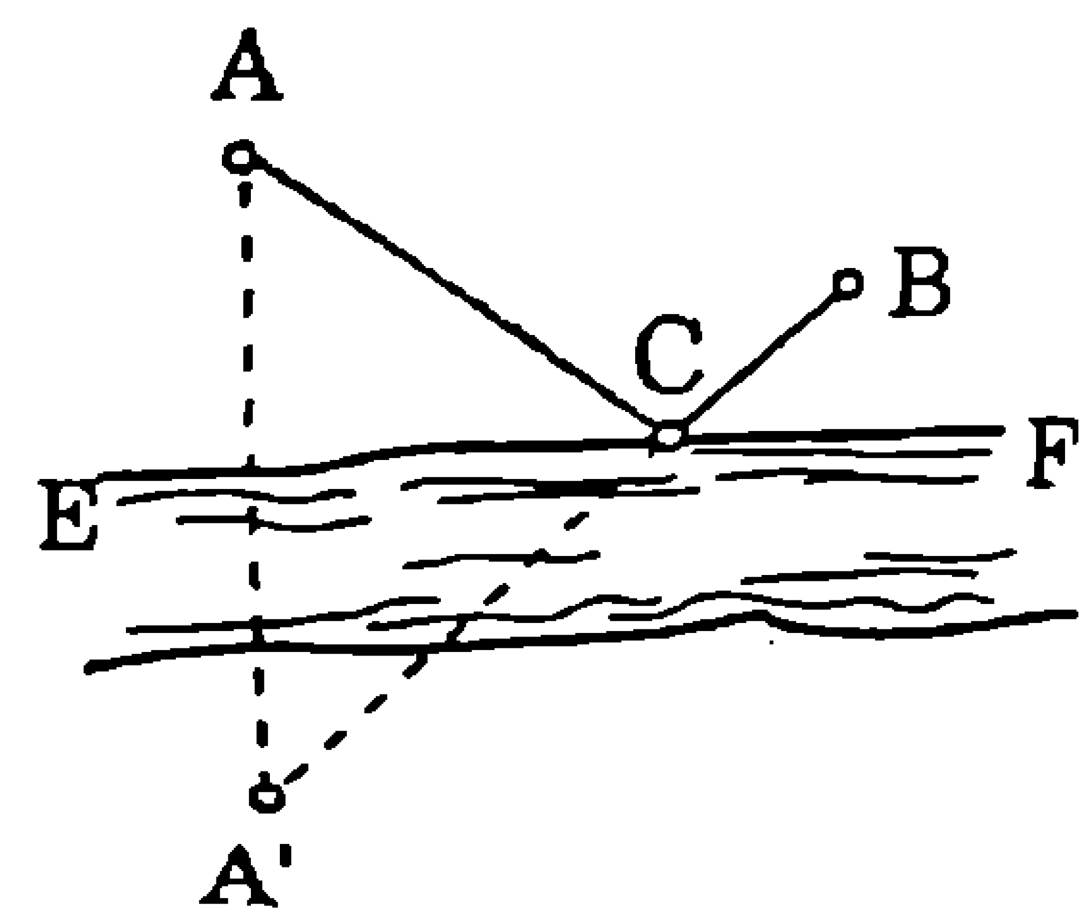
$$W = \sqrt{PQ} \tag{19-8}$$

Chứng minh được (19-8) không khó, dành lại cho những bạn đọc thích tìm tòi để luyện tập.

20. LỰA CHỌN TỐI ƯU

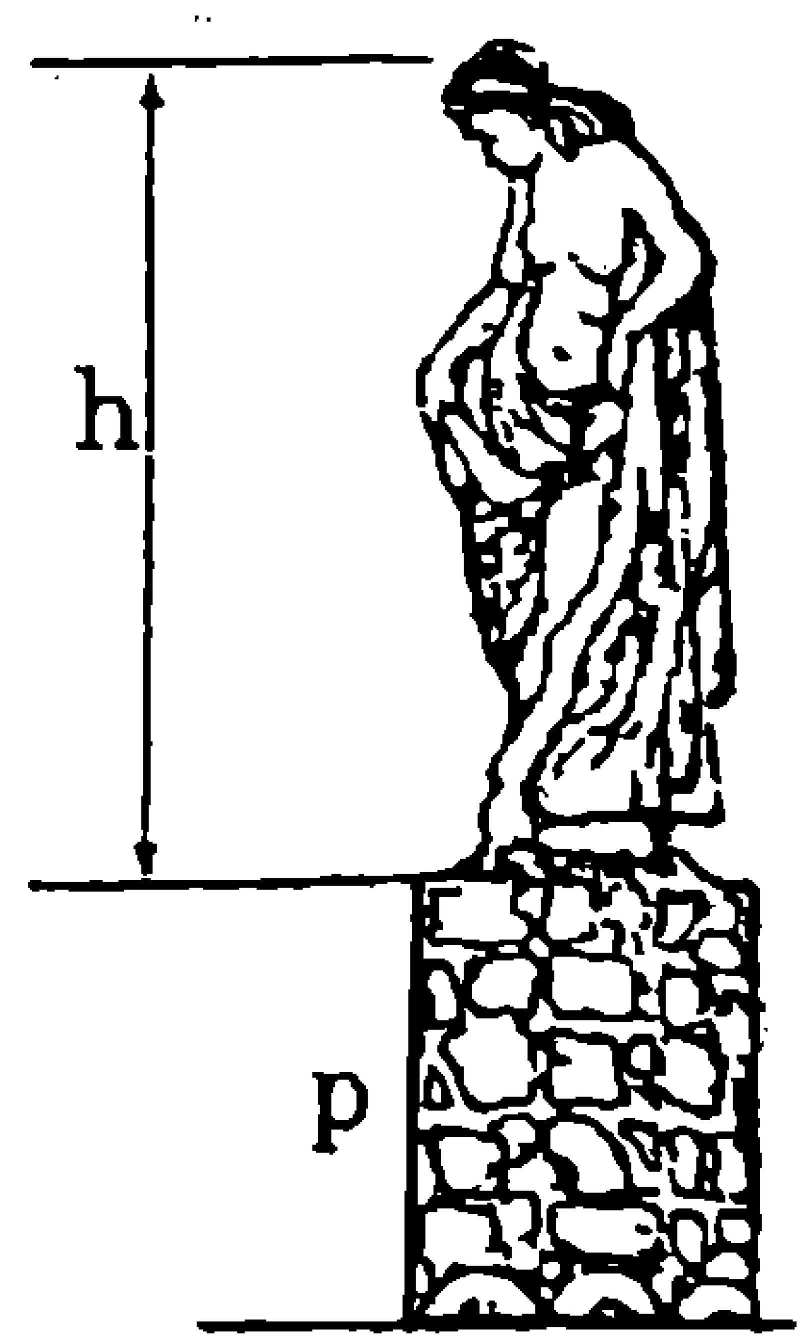
Lựa chọn tối ưu là chọn cái tốt nhất từ trong đám đông. Trong toán học, có lẽ không có đề tài nào mang nhiều tính chất thời đại hơn là lựa chọn tối ưu.

Từ hơn hai nghìn năm trước, người Hy Lạp cổ đại đã biết dùng tính chất đối xứng của hình vẽ để giải quyết một loại vấn đề lựa chọn tối ưu đơn giản nhất, chẳng hạn: Lấy một điểm C trên bờ sông, làm sao cho tổng số quãng đường đến hai thôn A và B là ngắn nhất. Hình 20-1 là sơ đồ lời giải, A' là điểm đối xứng của điểm A qua trục EF.



Hình 20-1

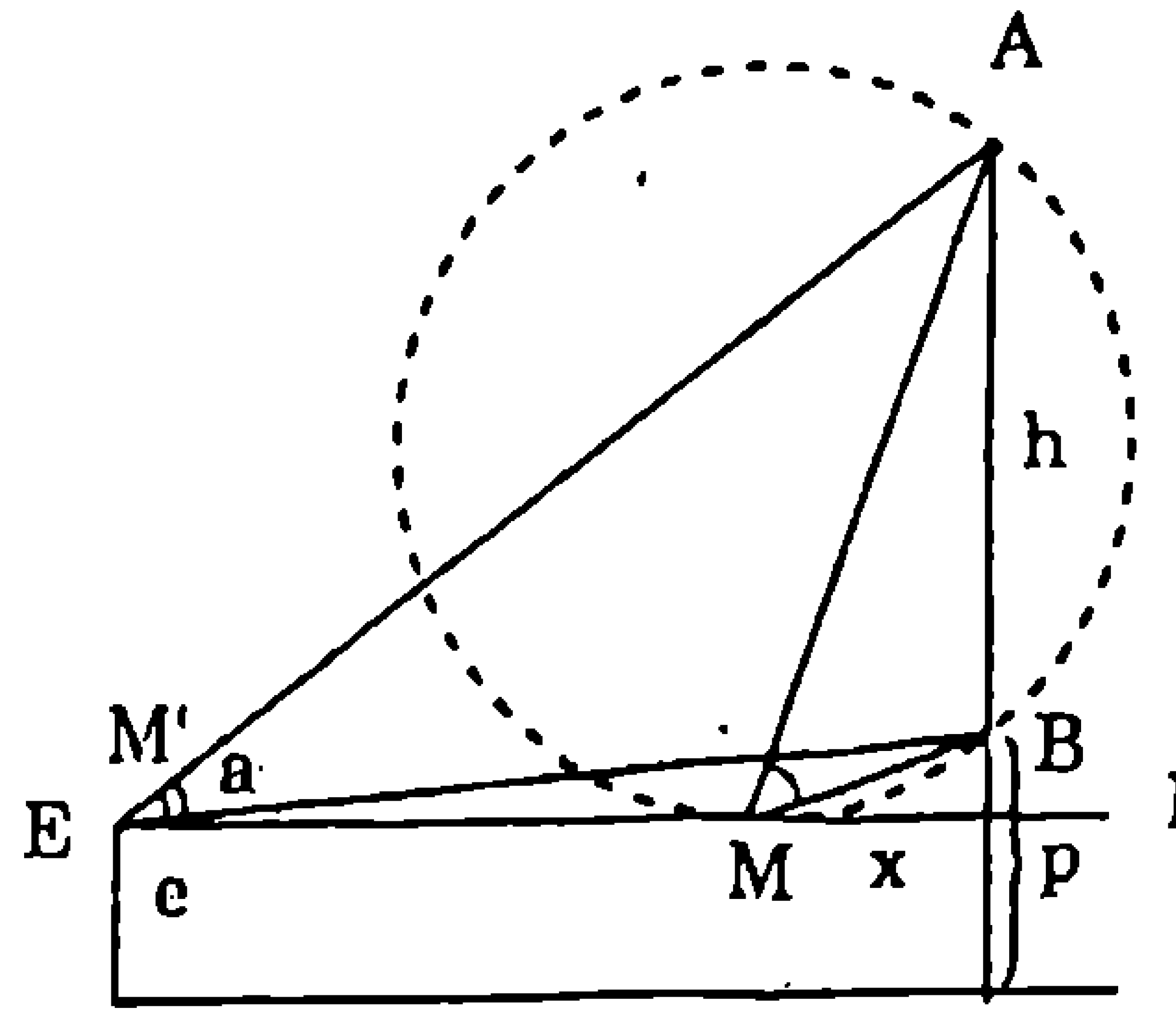
Trị số tối ưu là một loại đại lượng không đổi quan trọng nhất trong đại lượng biến đổi. Khi tìm trị số tối ưu, phương pháp hình học tỏ ra ưu việt. "Vấn đề tượng nặn" sau đây do nhà toán học J.Muller (1436-1476) người Đức nêu ra vào năm 1471:



Hình 20-2

Giả sử có một bức tượng nặn cao h thước Anh dựng trên một bệ cao p thước Anh. Một người chăm chú nhìn vào bức tượng này và đi về phía đó. Tia nhìn ngang của người đó cách mặt đất e thước Anh (hình 20-2). Hỏi người đó phải đứng ở chỗ cách bệ tượng bao xa mới có thể nhìn thấy bức tượng là lớn nhất.

Vấn đề này đã được nhà toán học A.Lorsch giải quyết bằng phương pháp hình học. Thực chất của vấn đề này là: Trên tia nhìn ngang EF, tìm điểm M để có góc nhìn lớn nhất. Đường tròn nét đứt trong hình 20-3 (đi qua đỉnh đầu A và điểm đáy B của tượng) tiếp xúc với tia nhìn ngang EF. Rõ ràng, tiếp điểm chính là điểm M cần tìm! Đó là do các điểm khác trên EF đều nằm ngoài đường tròn nét đứt, do đó góc nhìn tượng từ các điểm đó chỉ có thể nhỏ hơn góc nhìn từ điểm M.

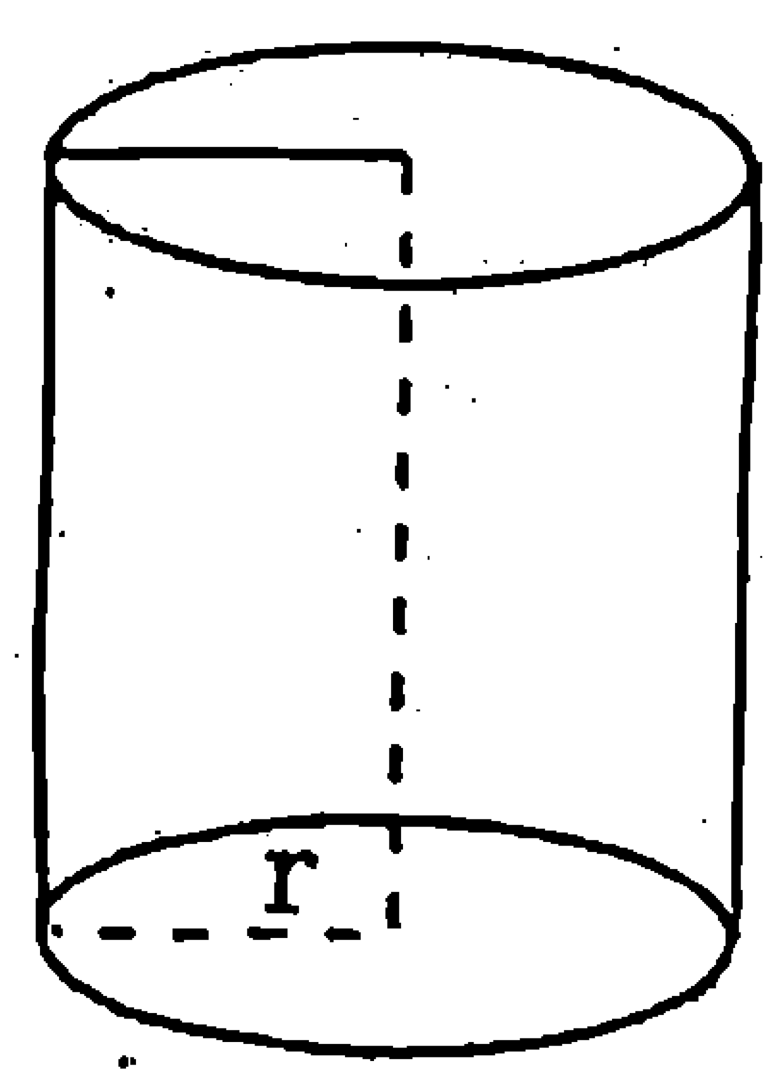


Hình 20-3

Theo sự phát triển của đại số, phương pháp tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) nhờ bất đẳng thức đã được sử dụng phổ biến. Chẳng hạn, bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (a,b,c>0) \qquad (20\text{-}1)$$

đã được bàn đến ở (11-7), chứng tỏ hình hộp chữ nhật có tổng chiều dài cạnh hoặc diện tích bề mặt cố định sẽ có thể tích lớn nhất chỉ khi nó là khối lập phương. Nhưng tác dụng của (20-1) không dừng ở chỗ đó, chúng ta còn có thể ứng dụng khéo léo vào việc giải rất nhiều vấn đề thực tế.



Hình 20-4

Một ví dụ đặc sắc là: Một khối trụ tròn có thể tích V cố định, chiều cao h và bán kính đáy r của nó nên theo tỷ lệ nào thì mới có diện tích bề mặt S của khối trụ này là nhỏ nhất? (hình 20-4).

Ta có:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \tag{20-2}$$

$$V = \pi r^2 h \tag{20-3}$$

Từ (20-3) và (20-2), theo bất đẳng thức Cauchy, ta được:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}$$

$$\geq 3 \times \sqrt[3]{2\pi r^2 \times \frac{V}{r} \times \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \tag{20-4}$$

Khi $2\pi r^2 = \frac{V}{r}$ thì S lấy trị số nhỏ nhất, tức là khi:

$$V = 2\pi r^3 \tag{20-5}$$

Từ (20-5) và (20-3), ta có:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r \tag{20-6}$$

Biểu thức (20-6) chứng tỏ, khối trụ tròn có thể tích cố định, khi chiều cao bằng đường kính đáy thì có diện tích bề mặt nhỏ nhất. Đây cũng chính là lý do vì sao nhiều loại hộp trụ tròn luôn được thiết kế chiều cao và đường kính bằng nhau. Bạn đọc còn có thể chứng minh bằng phương pháp tương tự để được kết luận. Những hộp trụ không nắp có cùng thể tích, hình dạng tiết kiệm vật liệu nhất là chiều cao hộp bằng một nửa độ lớn đường kính miệng hộp.

Sự sáng tạo ra tọa độ Descartes[1] khiến cho hình học và đại số kết hợp càng chặt chẽ hơn. Phép tính vi - tích phân do I.Newton và G.W.von Leibniz sáng lập đã cung cấp một phương pháp toán học hoàn chỉnh cho việc tìm cực trị của hàm số. Thế kỷ XVII, môn lựa chọn tối ưu đã xuất hiện một cách đầy triển vọng.

J.L.Lagrange

Hiện thực khách quan trong đại lượng biến đổi thường tồn tại một loại liên hệ nào đó, biểu hiện dưới dạng toán học như sau:

$$F_i = 0 \ (i = 1, 2, 3, ..., k). \qquad (20\text{-}7)$$

Joseph - Louis Lagrange (25/1/1736 - 10/4/1813) người Pháp đã đưa vào k nhân tử λ_i để chuyển bài toán tối ưu hoá đối với F với ràng buộc (20-7) thành bài toán tối ưu không điều kiện đối với ϕ:

$$\phi = F + \lambda_1 F_1 + ... + \lambda_k F_k \qquad (20\text{-}8)$$

Về sau λ_i được gọi là các nhân tử Lagrange và phương pháp nổi tiếng này được gọi là "Phương pháp nhân tử bất định" hoặc "Phương pháp thừa số chưa xác định".

Việc làm giản đơn nhưng lại rất có ý nghĩa này đã thể hiện một thiên tài toán học và trí tuệ của bậc thầy.

---

[1] R.Dascartes (1596 - 1650) là triết gia, nhà khoa học, nhà toán học người Pháp.

Theo đà phát triển của sản xuất và khoa học, bài toán tối ưu hoá hàm số đã xuất hiện. Có ba vấn đề cổ xưa nhất nhưng có tính đại diện nhất, đó là: "bài toán đường ngắn nhất", "bài toán đẳng chu" và "bài toán rơi nhanh nhất". Ba vấn đề rất thú vị này đã được các nhà toán học thiên tài L.Euler, Poxung, ... xây dựng nên một nhánh toán học tuyệt diệu: phép biến phân.

Sự xuất hiện máy tính điện tử khiến bài toán tối ưu hoá hàm số bậc nhất chẳng mấy ai để ý, lại được coi trọng và phát triển.

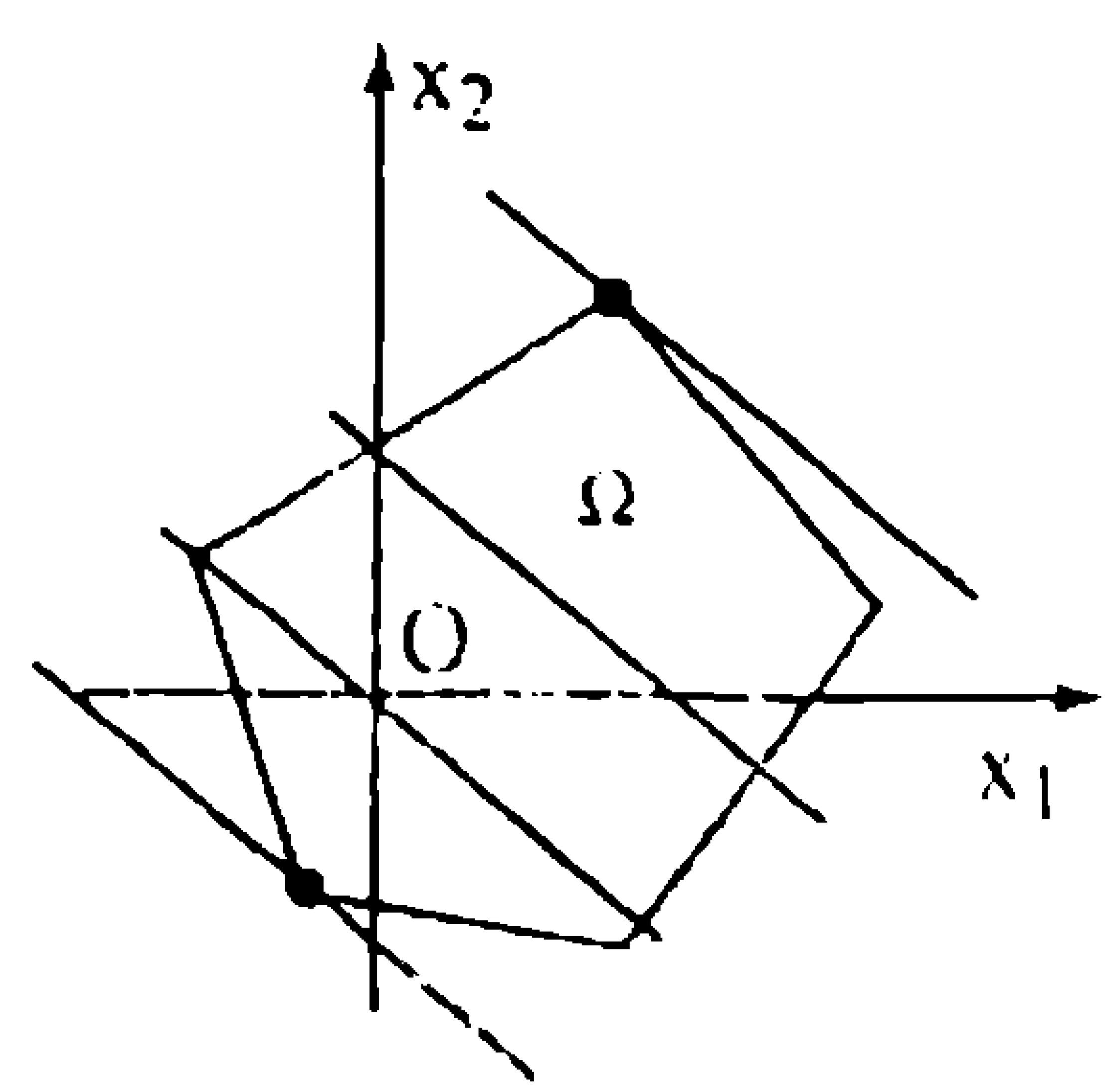
Phát biểu của bài toán tối ưu hoá hàm số bậc nhất như sau: Các số chưa biết $x_1, x_2, ..., x_k$ thoả mãn hệ bất đẳng thức

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + b_1 \geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + b_2 \geq 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nk}x_k + b_n \geq 0 \end{cases} \quad (20\text{-}9)$$

Hãy tìm trị số lớn nhất và trị số nhỏ nhất của hàm số bậc nhất:

$$y = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + d \quad (20\text{-}10)$$

Phương pháp tổng quát để giải quyết vấn đề này là "phương pháp đơn hình". Hình 20-5 giới thiệu tư tưởng cơ bản của phương pháp này. Hệ bất đẳng thức (20-9) tương đương với việc hạn chế trị số của lượng chưa biết ở trong vùng Ω, hàm số (20-10) đối với trị số y khác nhau là một nhóm "đường



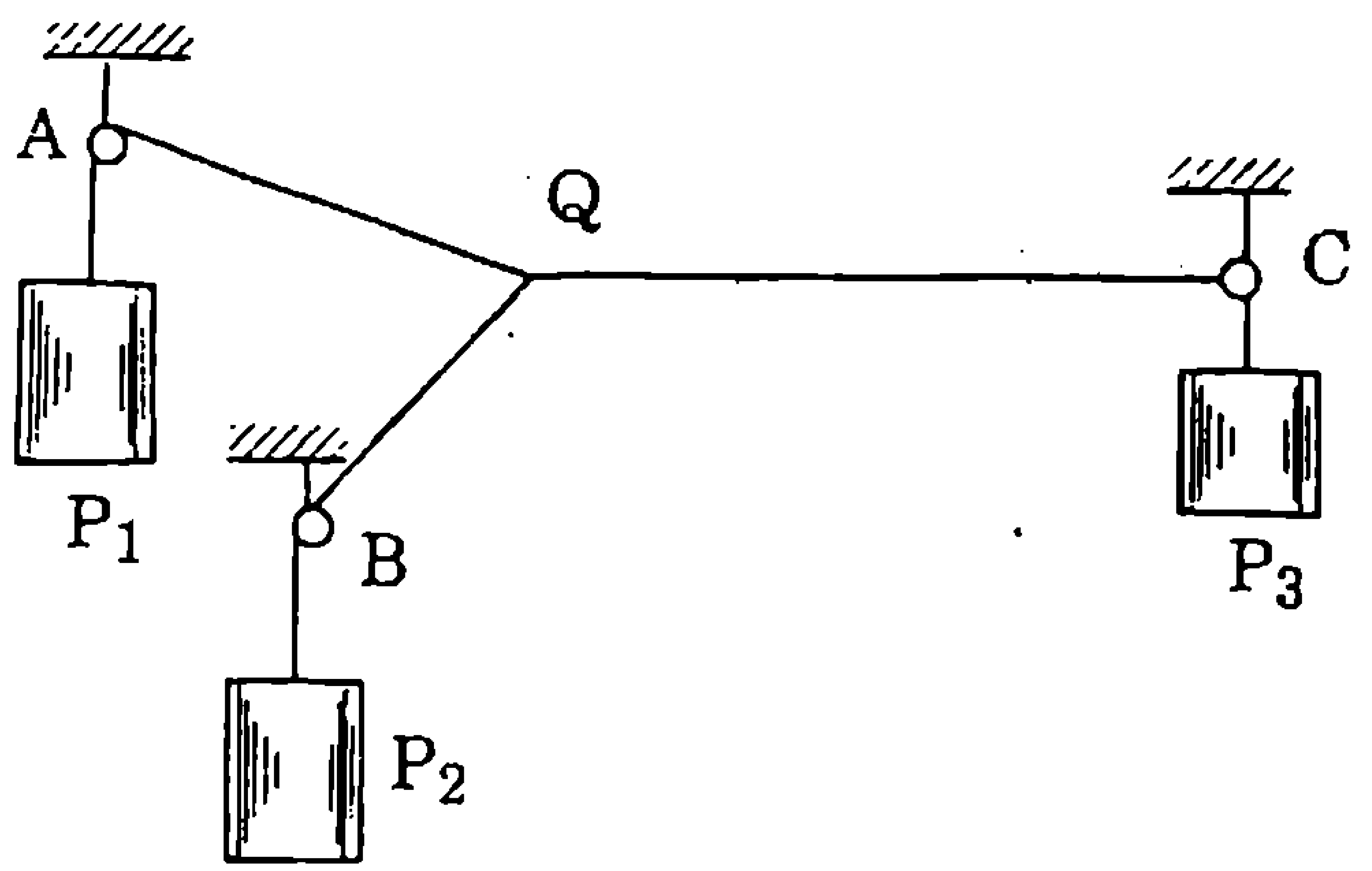
Hình 20-5

thẳng song song với nhau", từ đó trị số tối ưu sẽ lấy được trên điểm góc (là đỉnh của góc) của vùng Ω.

Do các vấn đề quy hoạch tuyến tính tương tự nói ở trên nêu ra trong thực tiễn đều mang tính chất đặc thù, vì thế người ta đã tổng kết ra rất nhiều phương pháp hay, thiết thực, khả thi như điều vận vật tư, lắp ráp xe hợp lý, ... làm cho lựa chọn tối ưu hàm số bậc nhất cổ xưa toả sáng trở lại.

Việc nghiên cứu các lĩnh vực khoa học tự nhiên khác, thường gợi ý cho lựa chọn tối ưu. Chẳng hạn, khi ta nghiên cứu đáy lỗ tổ ong (mục 12) thì biết được rằng mỗi tấm sáp hình thoi ghép thành đáy lỗ tổ ong đều có góc tù bằng 109°28' và góc nhọn bằng 70°32' là tối ưu nhất, kinh tế nhất.

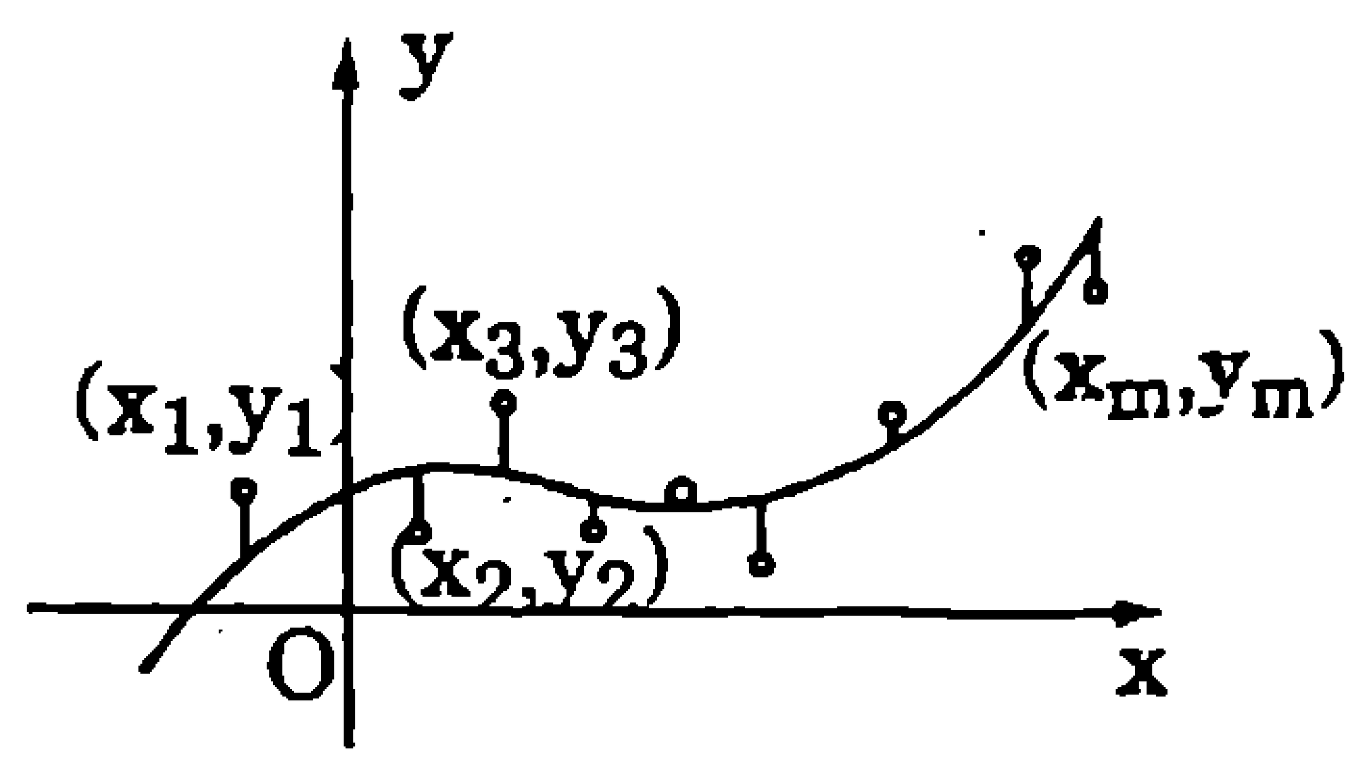
Một khối trụ tròn có bán kính a đặt nằm ngang trong nước chảy, tìm dòng chảy vòng của nước sẽ dẫn đến hàm số Jucovxki (17-1).



Hình 20-6

Có lúc dùng phương pháp mô phỏng trong cơ học có thể dễ thu được kết quả hơn phương pháp toán học. Chẳng hạn, ứng dụng lực kéo của dây cao su có thể dễ dàng tìm ra đáp số của bài toán nổi tiếng: Ba thôn xây dựng trường tiểu học. Trên mặt phẳng thẳng đứng dùng ba điểm mô phỏng ba thôn, dùng trọng vật P_i mô phỏng số học sinh ba thôn và dùng dây nhỏ nối ba điểm với điểm Q qua các ròng rọc (hình 20-6). Vị trí điểm Q sau khi cân bằng, sẽ là địa điểm tốt nhất (tối ưu) để xây dựng trường tiểu học. Có thể chứng minh được rằng, lúc đó tổng đường đi của học sinh ba thôn đến trường là ngắn nhất.

Những điều mà chúng ta nói ở trên đều là vấn đề tất nhiên. Trong thực tế có rất nhiều vấn đề mà ngay cả quan hệ giữa các đại lượng biến đổi đều không được biết. Để tìm quan hệ tương hỗ giữa chúng, ta thường dùng đường cong bậc n:



Hình 20-7

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \quad (20\text{-}11)$$

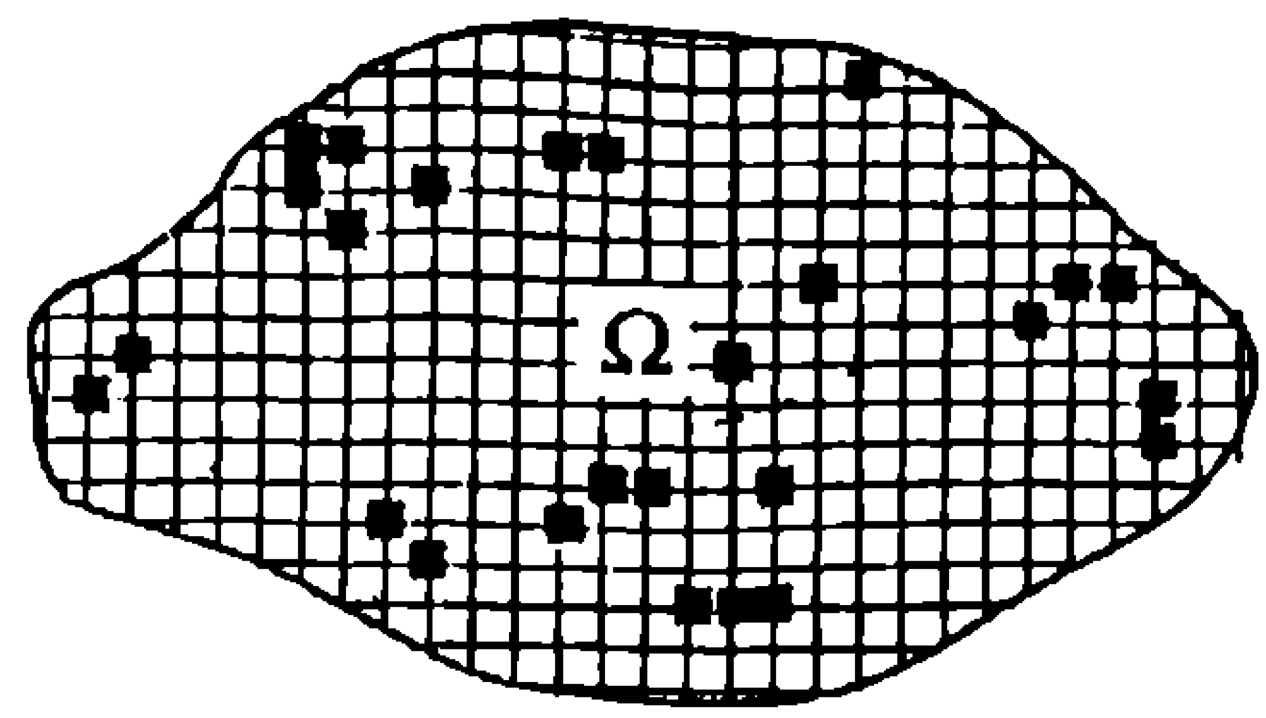
để ghép m nhóm số liệu thực nghiệm (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., m)$ (hình 20-7), ngược lại, coi m nhóm số liệu này là sai số ngẫu nhiên đối với đường cong. Các loại ghép này đòi hỏi

$$f = \sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2 \quad (20\text{-}12)$$

lấy trị số nhỏ nhất. Căn cứ vào yêu cầu nói trên để tìm ra n + 1 hệ số a_i, từ đó được đường cong ghép bậc n tối ưu. Đây chính là nội dung cơ bản của "phương pháp bình phương tối thiểu" đã nói ở mục 15 "Phương pháp lấy trị số một cách khoa học".

Bởi vì, phương pháp thống kê dựa vào định luật số lớn nên kết quả thu được chỉ có thể đạt độ chắc chắn lớn, tất nhiên không phải là tuyệt đối. Phương pháp Monte - Karlo sau đây là một ví dụ điển hình:

Chia khu vực thí nghiệm thành m mẩu vuông nhỏ diện tích bằng nhau như hình 20-8. Nếu chúng ta tìm được một mẩu vuông nhỏ mà trị số thí nghiệm ở trung tâm của nó tốt hơn n mẩu trong m mẩu thì chỉ cần tuỳ ý rút ra r mẩu trong số m mẩu và làm thí nghiệm ở trung tâm của mỗi mẩu, sau đó lấy một kết quả tốt nhất trong số đó là được.



Hình 20-8

Thực tế là khi rút r mẩu bất kỳ trong m mẩu thì khả năng có một mẩu trong số đó tốt hơn n mẩu là:

$$p=1-\left(\frac{n}{m}\right)^{r} \qquad (20\text{-}13)$$

Khi tăng r thì p càng tiệm cận với 1.

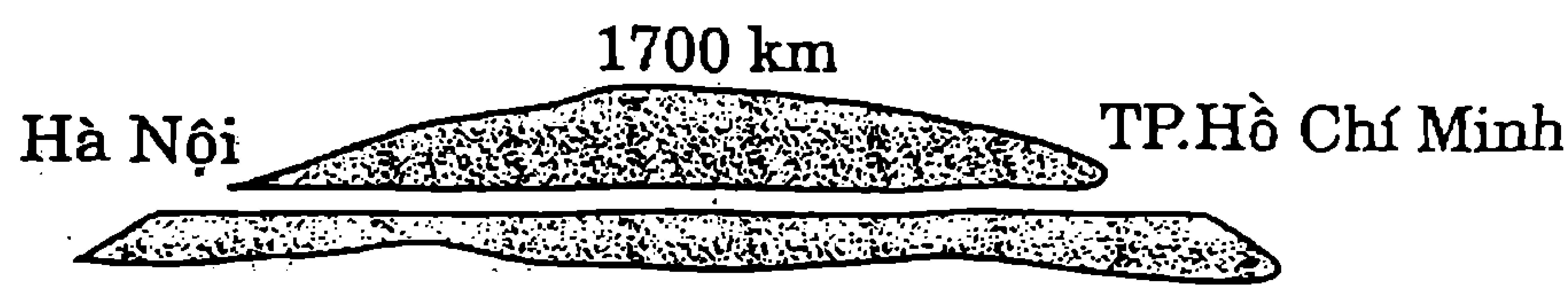
Cuối cùng còn phải nói thêm một vấn đề lựa chọn tối ưu khác khá lý thú. Vấn đề chọn ưu này có đặc điểm là không chỉ đơn thuần chọn lấy hoặc so sánh một số đại lượng nào đấy hoặc chọn lấy cái cực tiểu từ trong những cái cực đại của một số đại lượng nào đấy hoặc chọn lấy cái cực đại trong những cái cực tiểu. Tư tưởng cơ bản của việc lựa chọn tối ưu này là: "Cố gắng theo khả năng tốt nhất, tính toán đánh giá xấu nhất".

21. ĐƯỜNG NGẮN NHẤT

Có một câu chuyện như sau:

Giáo viên địa lý hỏi một học sinh: "Em hãy cho biết đường ngắn nhất từ Hà Nội đến thành phố Hồ Chí Minh"?

Học sinh đó nhìn quả địa cầu dụng cụ trực quan để trên bàn giáo viên, thủng thẳng trả lời: "Là con đường hầm đào xuyên thẳng từ Hà Nội đến Thành phố Hồ Chí Minh!" (hình 21-1).



Hình 21-1

Cả lớp ồ lên!

Quả thực, về lý thuyết thì điều học sinh đó trả lời không sai, bởi vì trong hình học phẳng đã khẳng định rằng: "Đoạn thẳng nối hai điểm là đường ngắn nhất trong các đường nối hai điểm đó. Chẳng qua con người đã quen với nếp nghĩ hạn chế các hoạt động của mình ở trên bề mặt Trái Đất. Do vậy, đường từ Hà Nội đến Thành phố Hồ Chí Minh phải hiểu là đường hình cung theo bề mặt Trái Đất, dài khoảng 1700km.

Đường hình cung qua hai điểm trên bề mặt Trái Đất có thể dùng biện pháp sau đây mà biểu thị ra một cách trực quan: Kéo căng một sợi dây mảnh qua hai điểm trên mặt quả địa cầu dụng cụ trực quan, sợi dây mảnh này có thể coi là đường hình cung.

Vào khoảng đầu thế kỷ XX ở Peterbua (Leningrat) đã xuất hiện một tập sách "Đường sắt ngầm tự động giữa Peterbua và Mockva".

Đây là một cuốn tiểu thuyết viễn tưởng mới chỉ viết xong ba chương. Tác giả đã nêu ra một kế hoạch táo bạo: Đào một đường hầm thẳng tắp, dài 800km giữa hai thủ đô cũ - mới của nước Nga. Ý của tác giả là: đường xưa nay đều được xây dựng theo bề mặt cong của Trái Đất, cho nên đều là hình vòng cung, con đường hầm mà ông ta thiết kế lại thẳng tắp!

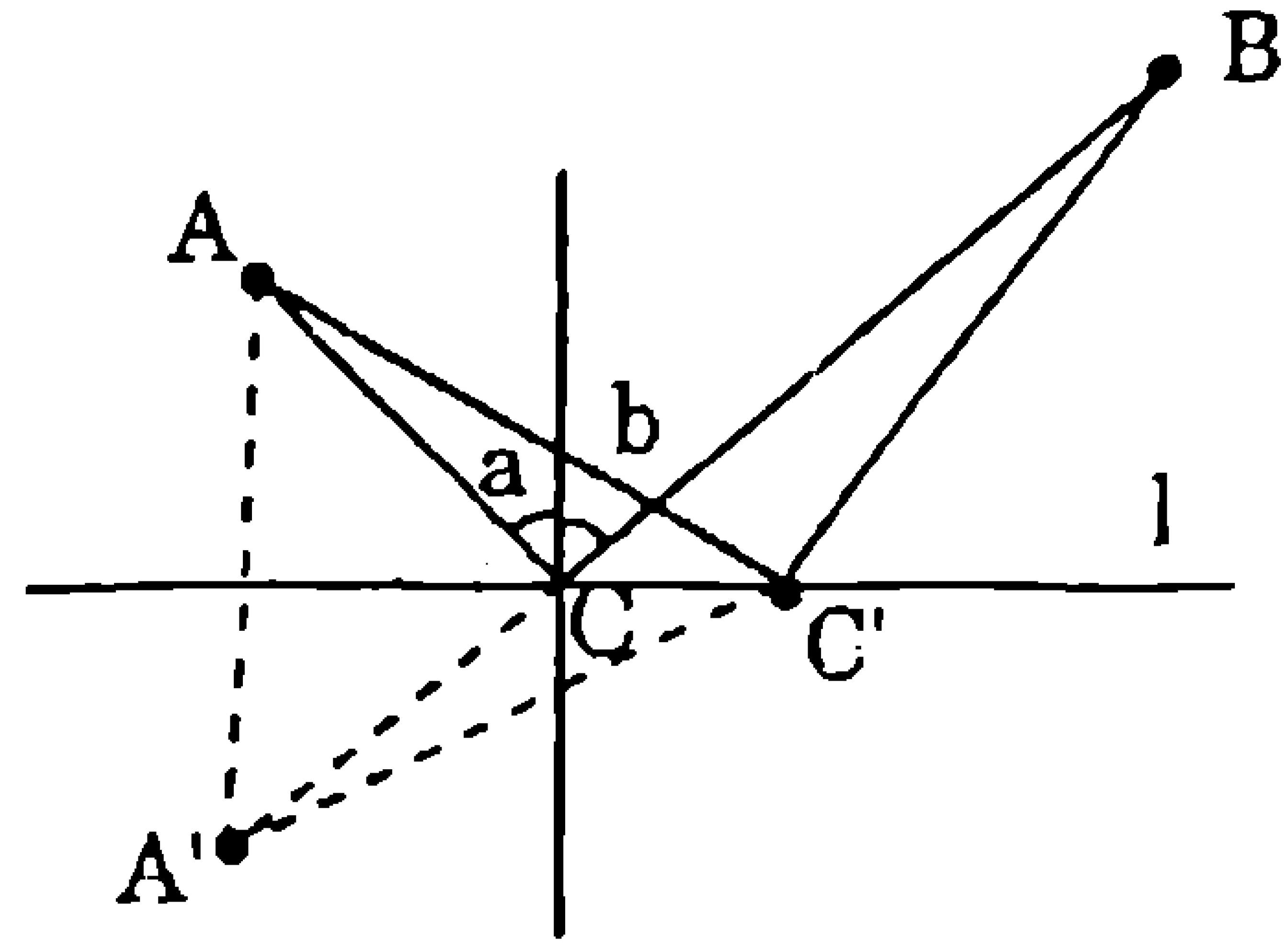
Điều quan trọng nhất của kế hoạch táo bạo này không phải là muốn có "đường ngắn nhất", mà là nếu có con đường như vậy thì sẽ phát sinh ra một hiện tượng khác thường: xe cộ giống như con lắc. Tốc độ mở đầu rất chậm, sau đó do tác dụng của trọng lực (lực trọng trường), tốc độ xe ngày càng nhanh, gần điểm giữa của đường hầm tốc độ đạt cao nhất, sau đó giảm dần, dựa vào quán tính tiến về cuối đường hầm. Tác giả đã tính toán được rằng, nếu bỏ qua ma sát thì đi từ Peterbua đến Mockva chỉ mất 42 phút 12 giây!

Thật ra, đường hầm đào trong lòng đất để làm đường giao thông thì đã có từ lâu và rất nhiều. Chẳng hạn, đường hầm trên tuyến đường sắt Leverpool - Manchester ở Anh có từ năm 1826, đường hầm Seikan dài nhất thế giới (52,9km) nối đảo Houshu với đảo Hokkaido xây dựng trong 25 năm đã hoàn thành tháng 3/1988 hoặc đường hầm lớn nhất thế giới (dài hơn 50km) dưới biển Manche, nối Anh và Pháp đã hoàn thành năm 1994, ... Ở nước ta, không kể đường hầm dưới đèo Hải Vân dài 6310m đang xây dựng, hiện đã có 39 hầm (hầu hết trên đường sắt Bắc - Nam) dài tổng cộng 10760m.

Tuy vậy, các đường hầm vừa nêu vì quá ngắn nên ảnh hưởng của lực trọng trường không lớn, hơn nữa nhiều đường không phải là đường thẳng tắp!

Tính chất chỉ tiến lên theo "đường ngắn nhất" là vấn đề mà các nhà vật lý đã chú ý từ lâu.

Ở hình 21-2, tia sáng phóng ra từ điểm A phản xạ đến điểm B thông qua điểm C trên đường *l*. Do góc tới bằng góc phản xạ, suy ra điểm C là giao điểm của đoạn thẳng A'B với đường *l*, trong đó điểm A' là điểm đối xứng của A qua trục *l*. Dễ chứng minh được rằng, đối với một điểm C' trên đường *l*, tất phải có:



Hình 21-2

$$AC' + C'B > AC + CB.$$

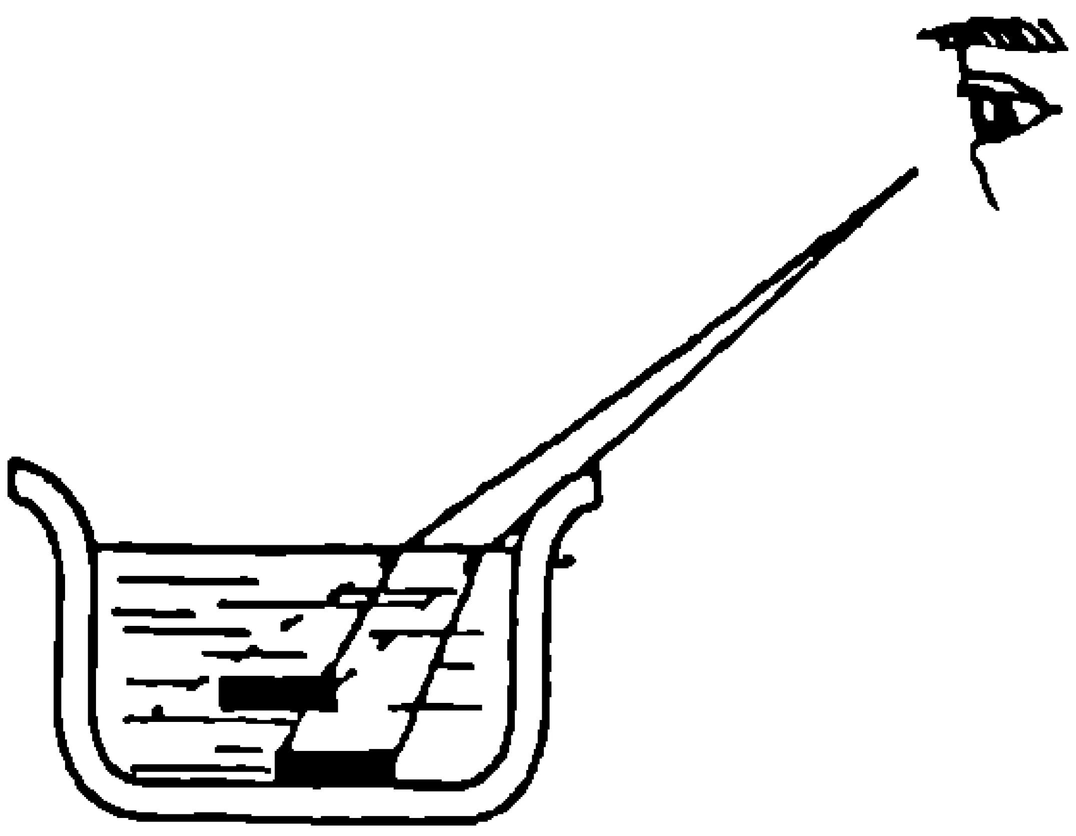
Sự thật là:

$$AC + CB = A'C + CB = A'B < A'C' + C'B = AC' + C'B.$$

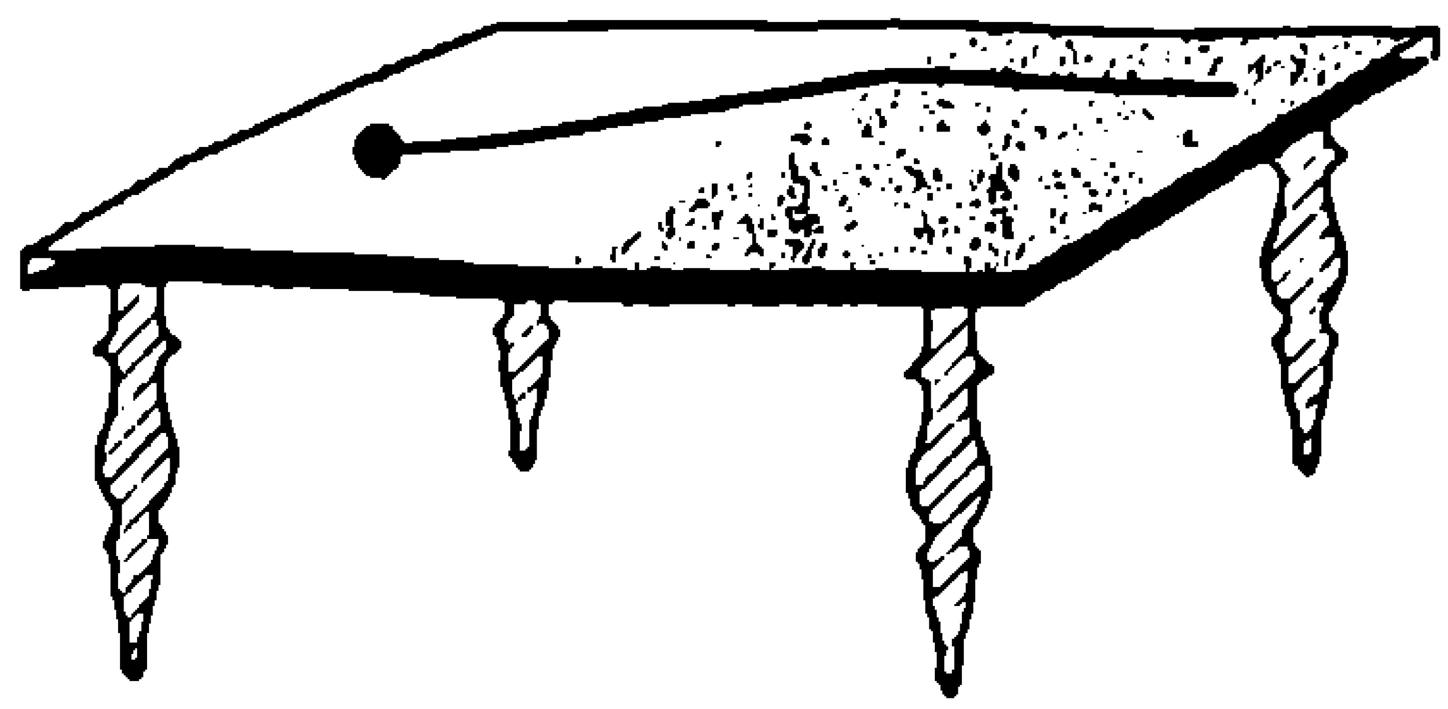
Điều này chứng tỏ đường gấp khúc ACB mà ánh sáng đi là "đường ngắn nhất" từ A đến B qua đường *l*.

Nói chính xác: "Đường ngắn nhất" trong trường hợp này là đường mà ánh sáng đi trong thời gian ít nhất.

Trường hợp ở hình 21-3 lại hơi khác: Vật vốn không nhìn thấy (vì bị thành chậu che khuất) nhưng ở trong nước thì lại nhìn thấy được. Nguyên nhân là do tốc độ ánh sáng đi trong không khí và trong nước không giống nhau, nên xuất hiện đường đi gấp khúc. Thời gian ánh sáng đi theo đường gấp khúc ít hơn đi theo đường thẳng.



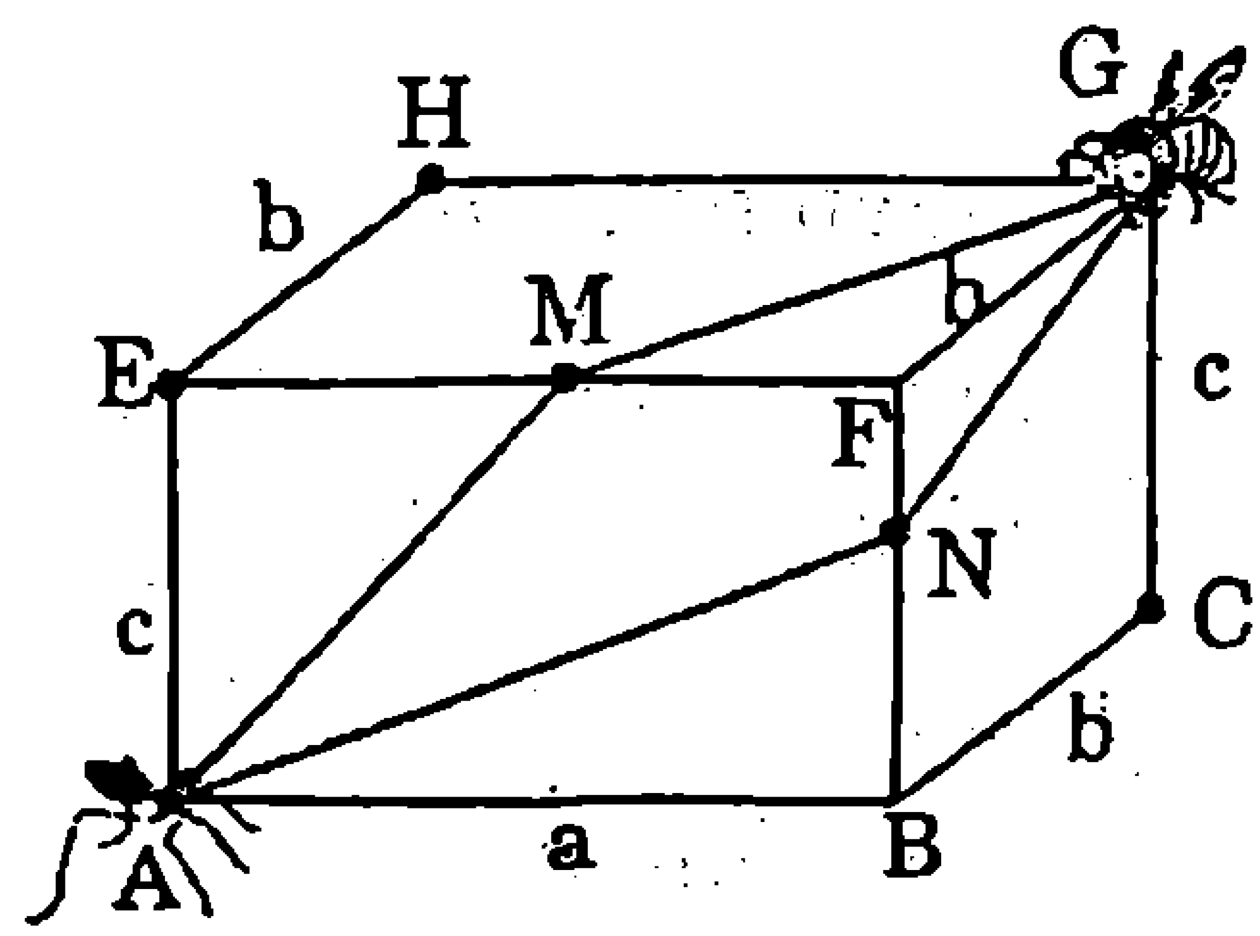
Hình 21-3



Hình 21-4

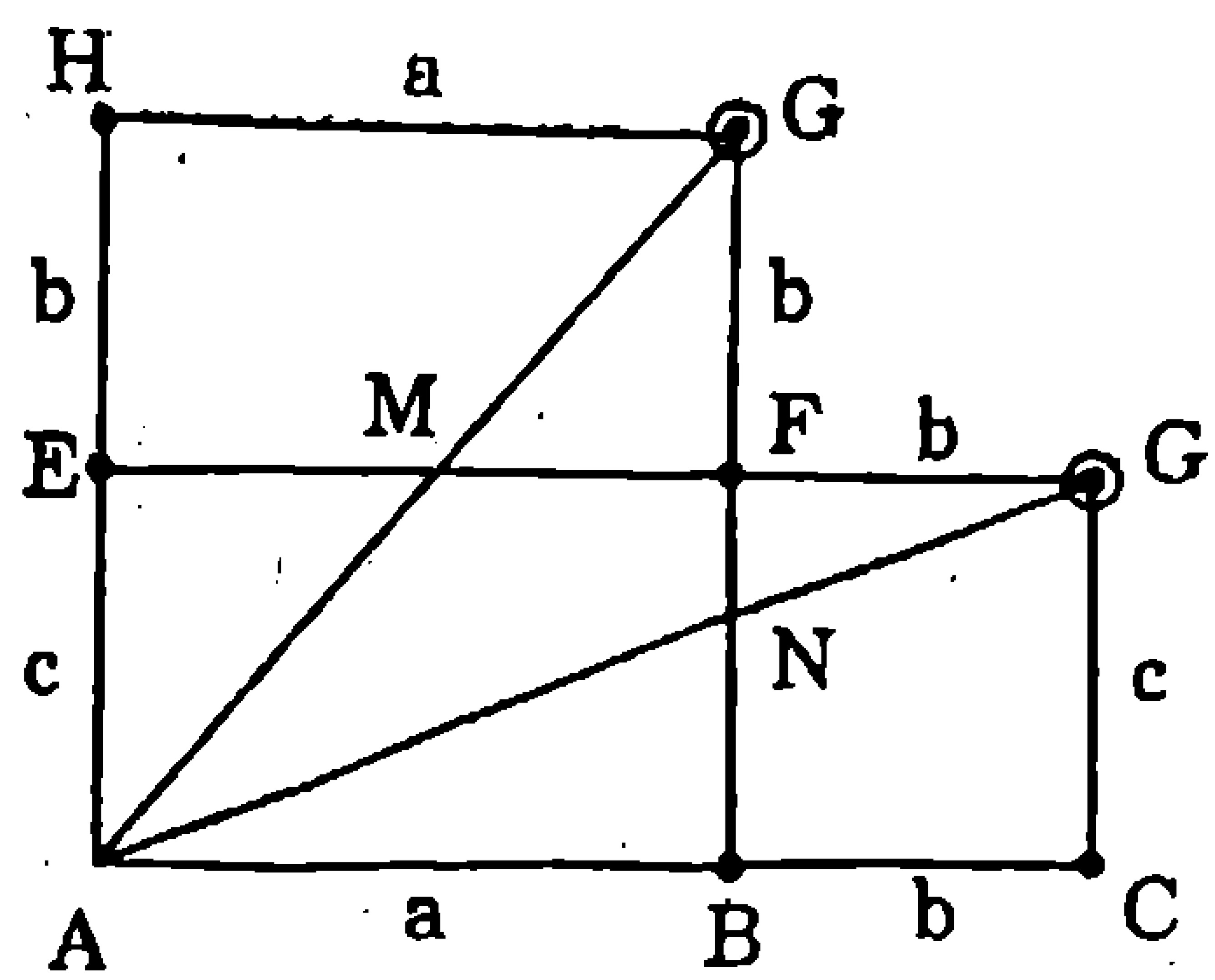
Bạn đọc hãy tự làm một thí nghiệm sau đây: phủ một tấm vải nhung lên nửa mặt bàn nhẵn bóng. Để một viên bi kim loại lăn từ mặt bàn nhẵn sang tấm vải nhung (hình 21-4). Lúc này bạn sẽ thấy một hiện tượng lạ: bi đổi hướng ở chỗ ranh giới với vải, giống như khúc xạ của tia ánh sáng. Nguyên nhân của hiện tượng này là do tốc độ của viên bi đi trên mặt trơn nhẵn và trên mặt vải nhung không giống nhau. Viên bi đi cũng giống như tia sáng, con đường đi cũng là "đường ngắn nhất"!

Sau đây là một ví dụ thú vị: Một con nhện ở điểm đỉnh A của một khối gỗ chữ nhật, một con ruồi ở điểm đỉnh G đối diện với A của khối gỗ này (hình 21-5). Hỏi con nhện phải bò theo đường nào mới có thể bắt được con ruồi nhanh nhất?



Hình 21-5

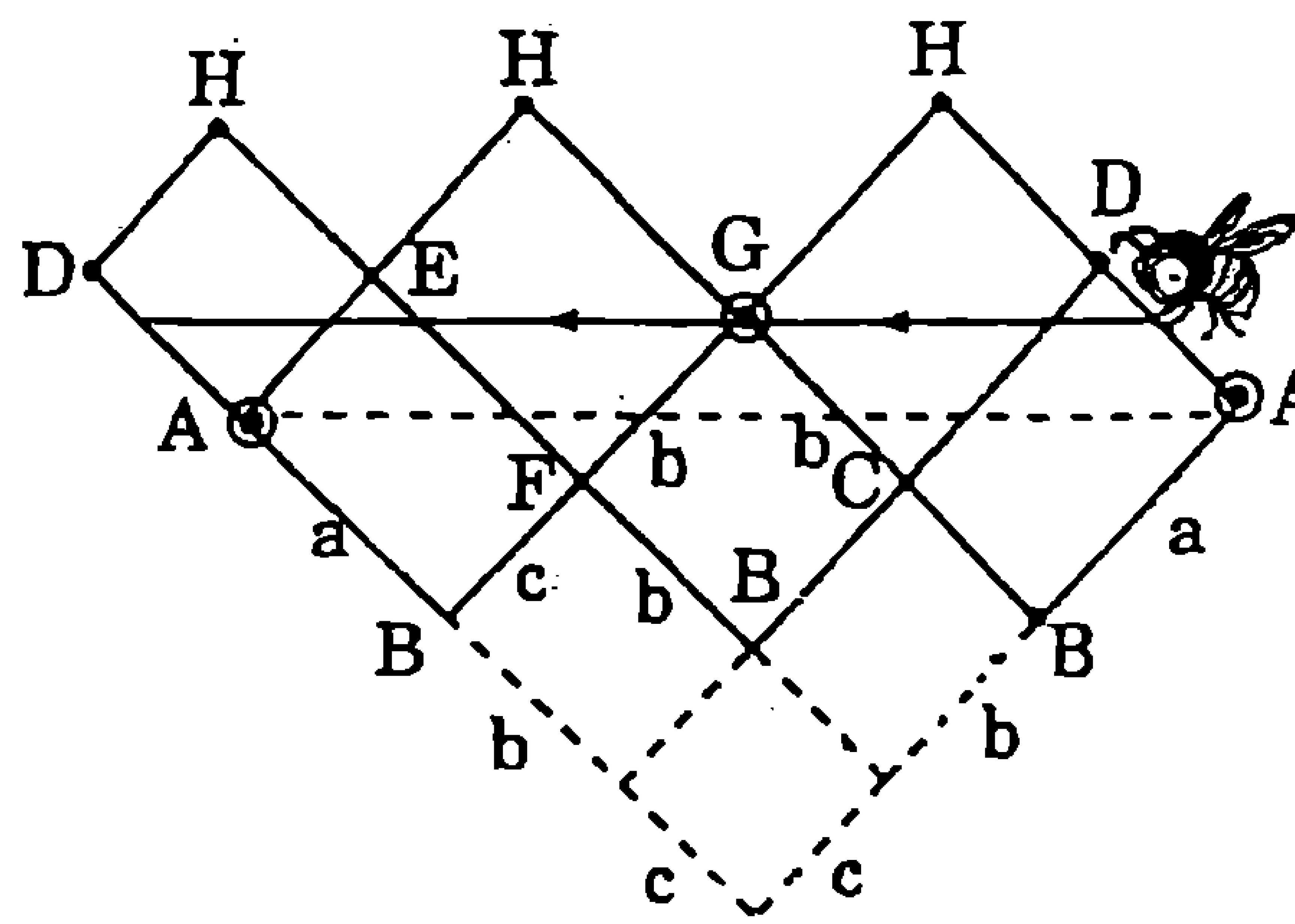
Rõ ràng, khi khai triển ba mặt nhìn được ở hình 21-5 ta được hình 21-6. Đường con nhện phải là đường ngắn nhất trong hai đoạn AMG và ANG. Giả sử AB = a; BC = b và AE = c thì từ hình 21-6, ta có:



Hình 21-6

$$\begin{cases} AMG = \sqrt{(b+c)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc} \\ ANG = \sqrt{(b+a)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab} \end{cases} \quad (21\text{-}1)$$

Từ (21-1) ta thấy rằng, khi a > c thì ANG > AMG, tức là nhện phải bò theo đường gấp khúc AMG mới bắt được ruồi nhanh nhất, ngược lại khi a < c thì nhện phải bò theo đường gấp khúc ANG.



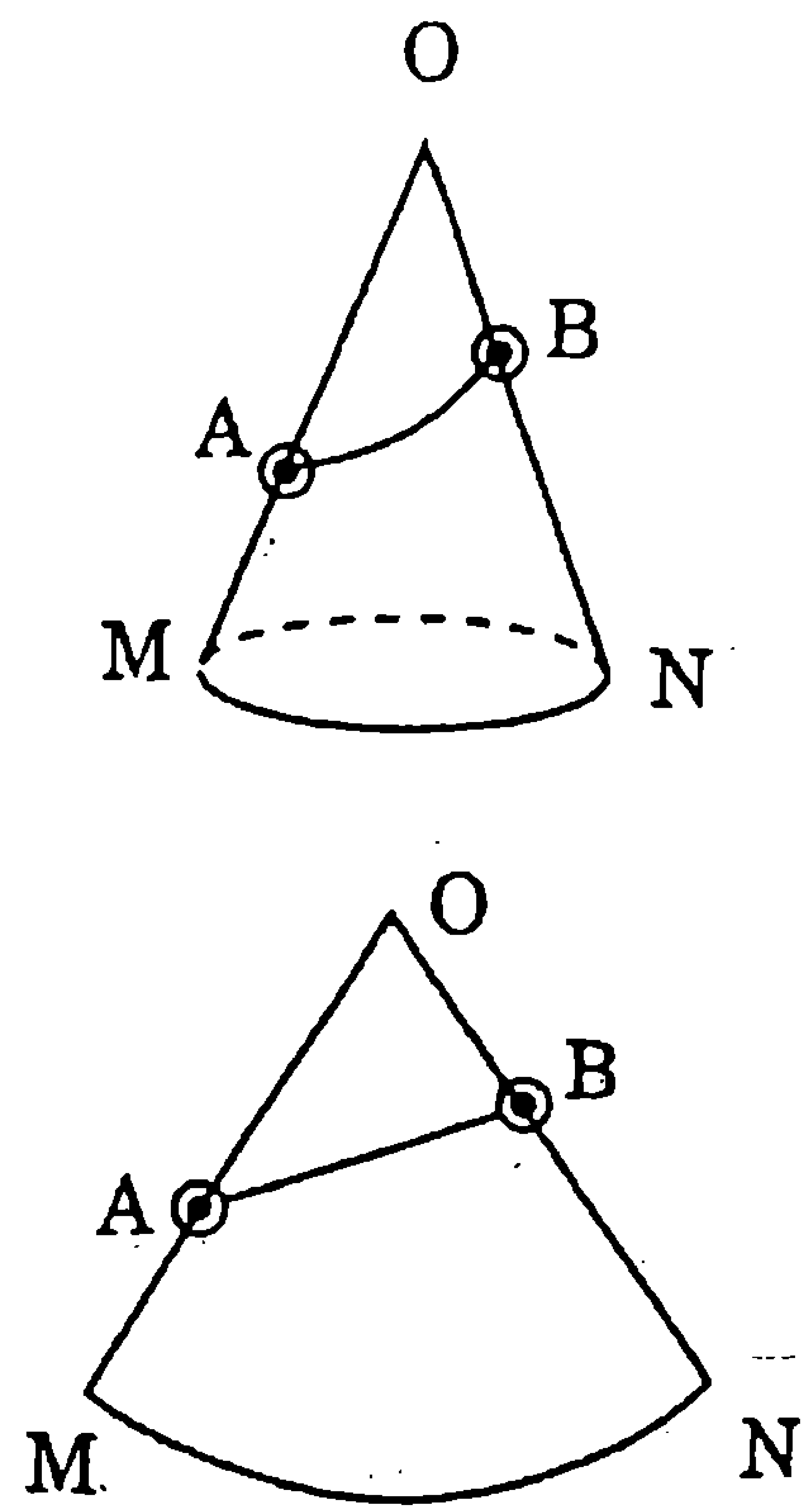
Hình 21-7

Một trường hợp khác: Ruồi muốn bò qua cả sáu mặt khối chữ nhật để đề phòng sự tập kích của nhện, rồi mau chóng trở về chỗ cũ. Vậy ít nhất ruồi phải bò một đoạn đường dài bao nhiêu?

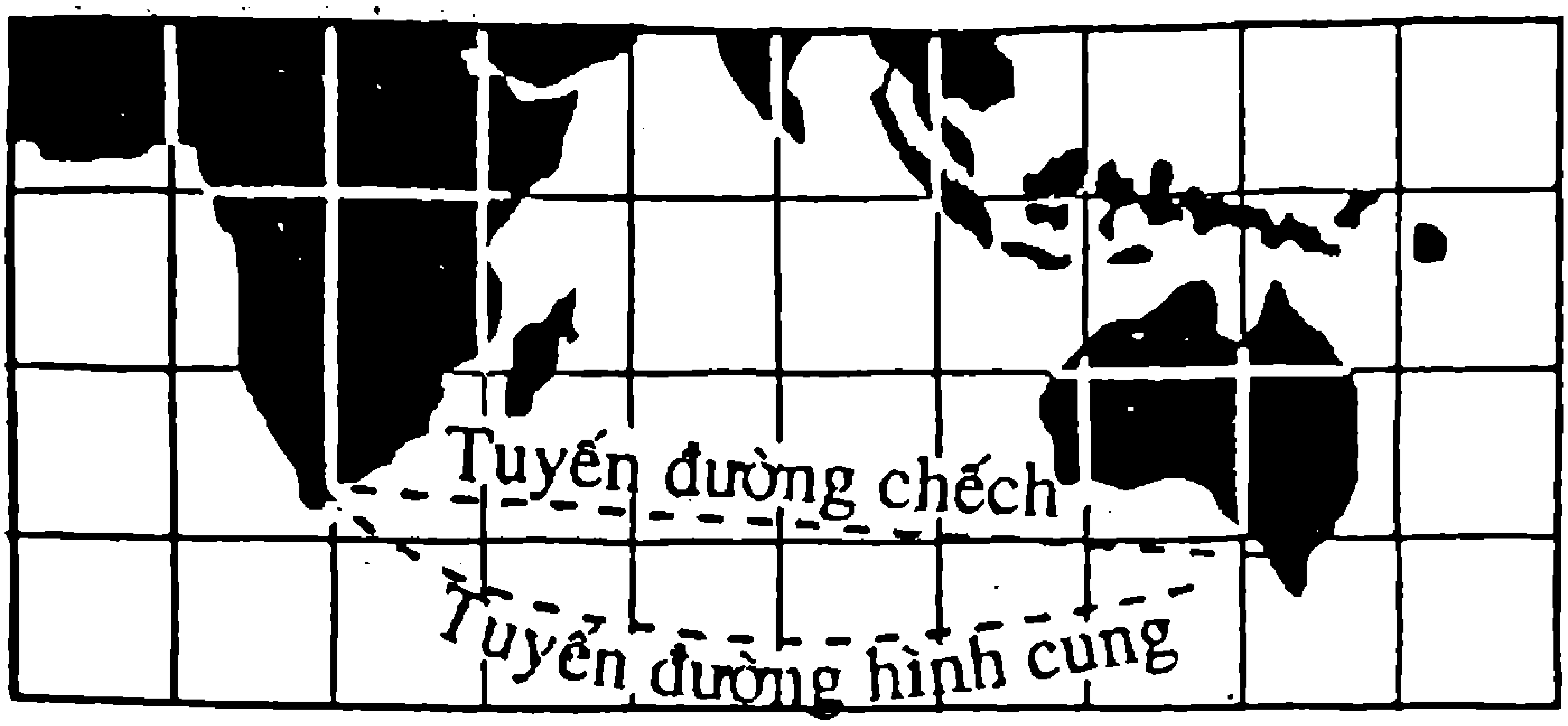
Kết luận của trường hợp này là bất ngờ, từ hình khai triển 21-7 có thể thấy rằng, đường bò của ruồi phải qua điểm G và song song với đoạn A-A (nét gạch đứt). (Vì sao? Bạn đọc hãy suy nghĩ một chút). Dễ tính ra, chiều dài đường bò của ruồi là $\sqrt{2}$ (a + b + c). Đại lượng này không liên quan tới vị trí ban đầu của ruồi. (Vì sao? Bạn đọc tự giải thích).

Rất rõ ràng là, vấn đề mặt cong có thể mở thành mặt phẳng, vấn đề "đường ngắn nhất" trên mặt cong đều có thể dùng phương pháp khai triển như trên để giải quyết. Mặt cong chóp nón ở hình 21-8 là một ví dụ.

Tuy vậy, không phải tất cả mặt cong đều có thể khai triển thành mặt phẳng. Với mặt cầu mà ta thường gặp, bất cứ bộ phận nhỏ nào của nó cũng không thể khai triển thành mặt phẳng. Đó chính là nguyên nhân của hiện tượng sau đây: Khi bạn giở một tấm bản đồ, bạn quan sát kỹ sẽ phát hiện một hiện tượng thú vị là các tuyến đường hàng hải hoặc hàng không vẽ trên bản đồ hầu như đều là các đường hình cung. Đây mới là "đường ngắn nhất" trong thực tế.



Hình 21-8



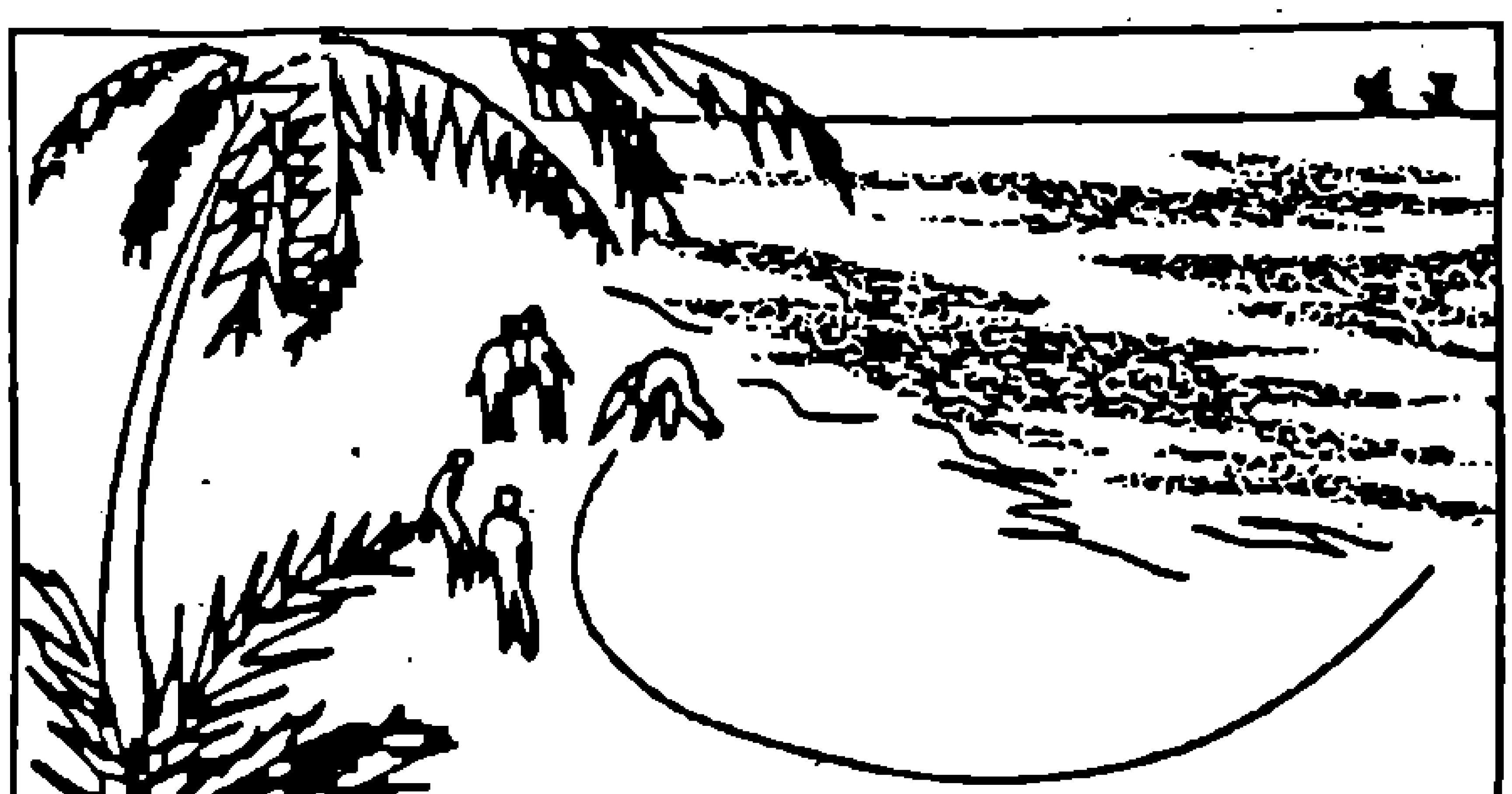
Hình 21-9

Hình 21-9 vẽ hai tuyến đường hàng hải nối mũi Hảo Vọng (châu Phi) và cảng Melbourne phía Nam Ôxtrâylia. Tuyến đường hình cung dài 5450 hải lý, còn tuyến đường chếch dài 6020 hải lý. Như vậy, tuyến đường chếch dài hơn tuyến đường hình cung 570 hải lý, tương đương với 1050km. Do sự méo hình của bản đồ mà tạo thành ảo giác cho con người.

22. KẾ SÁCH CỦA NỮ HOÀNG TICTOUR

Theo truyền thuyết Hy Lạp, nàng Tictour con gái quốc vương Tyrian xứ Tuila bị gán làm vợ chú của mình. Về sau ông chú này (tức là chồng của Tictour) bị em gái của Tictour là Comaonli nữ hoàng của xứ Xapolos giết chết. Tictour mang theo vàng bạc, châu báu sang bờ biển phía Tây châu Phi để mua đất của tù trưởng Yacbas và về sau trở thành nữ hoàng đầu tiên của người Katiky.

Tictour rất thông minh. Bà nói với tù trưởng Yacbas rằng, bà chỉ mua một mảnh đất mà một miếng da bò có thể bọc được. Tù trưởng Yacbas nghĩ rằng, mảnh đất như vậy không đáng kể, nên đã chấp nhận. Bà cho giết một con bò để lấy tấm da cắt thành sợi dây nhỏ và nối lại để đo đất.

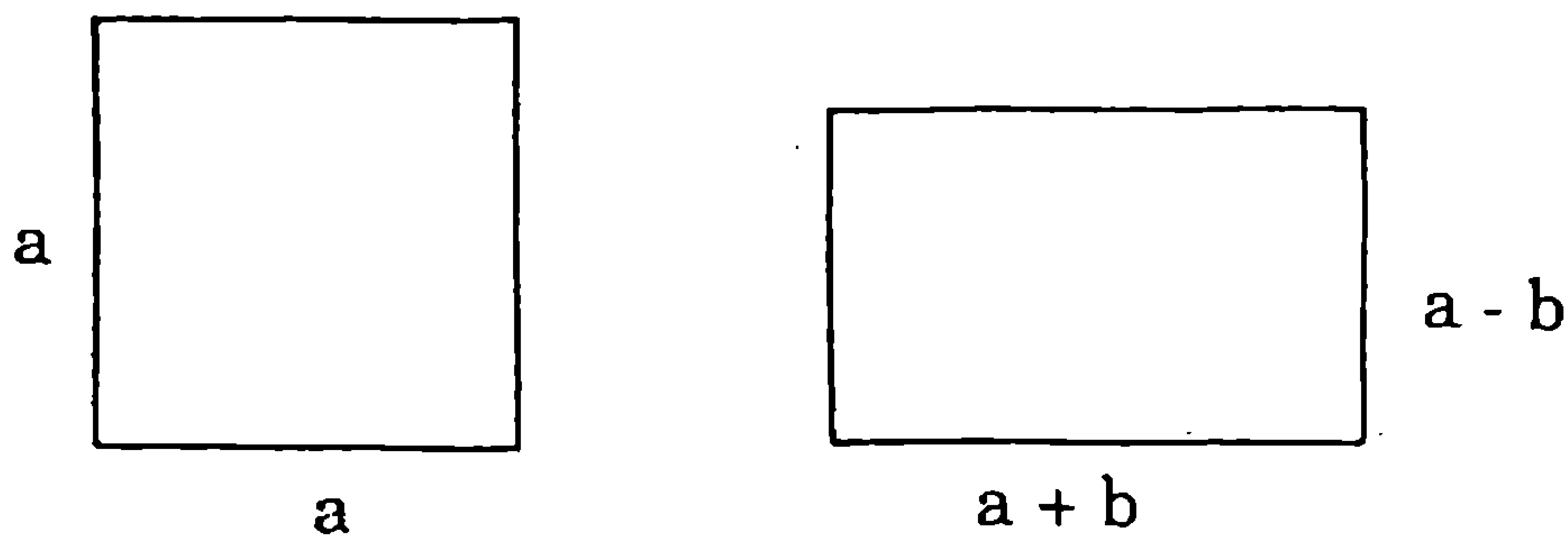


Tictour cho rằng, vì mảnh đất ở ven biển nên nếu dùng dây quây thành một nửa hình tròn thì sẽ được diện tích lớn nhất. Về sau nội dung này được gọi là "Bài toán Tictour".

Bây giờ ta hãy xem, liệu mảnh đất như vậy có phải lớn nhất không?

Trước tiên ta hãy xem, giữa hình vuông và hình chữ nhật cùng chu vi thì hình nào có diện tích lớn hơn?

Cho cạnh hình vuông là a, cạnh hình chữ nhật là a – b và a + b (hình 22-1) thì hai hình này có cùng chu vi là 4a.



Hình 22-1

Ta tính diện tích:

$$S_{hv} = a \times a = a^2$$

$$S_{cn} = (a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$$

Vì $b > 0$, cho nên $S_{hv} > S_{cn}$.

Như vậy, nếu cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn hơn hình chữ nhật.

Tương tự, nếu so sánh với các tứ giác khác cùng chu vi thì hình vuông vẫn có diện tích lớn nhất. Trong trường hợp này, ta có:

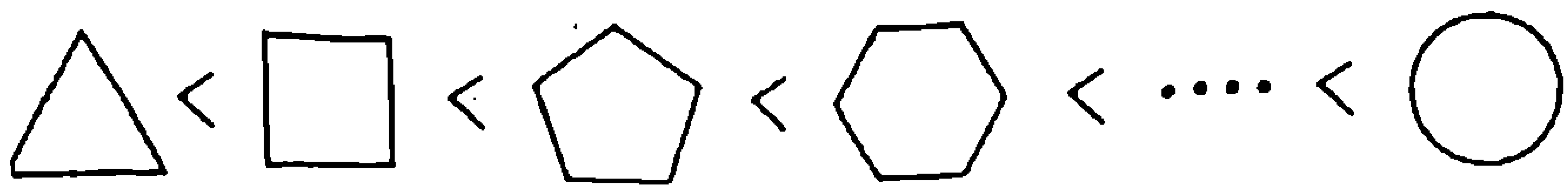
$$S_{\text{tứ giác bất kỳ}} < S_{\text{diều}} < S_{\text{thoi}} < S_{\text{vuông}},$$

trong đó tứ giác hình cái diều có hai cạnh bằng nhau từng đôi một.

Người ta cũng đã chứng minh được rằng:

1. Với các đa giác có cùng số cạnh mà có cùng chu vi thì đa giác đều có diện tích lớn nhất;

2. Trong số các đa giác đều thì đa giác nào có số cạnh nhiều hơn sẽ có diện tích lớn hơn và lớn nhất (giới hạn) là diện tích hình tròn (hình 22-2).



Hình 22-2

Điều 2 là nội dung của "bài toán đẳng chu". "Bài toán đẳng chu" là một trong những bài toán cơ bản của phép tính biến phân. Nội dung của "Bài toán đẳng chu" như sau:

"Trong các đường có độ dài cho trước, tìm đường sao cho một hàm số nào đó trên các đường đó đạt cực trị".

Bài toán này còn có thể mở rộng: chuyển từ đường trong mặt phẳng sang mặt trong không gian, thay độ dài bởi diện tích, ...

Bảng 22-1 liệt kê diện tích một số loại hình cùng chu vi là 4cm.

Bảng 22-1

Hình có chu vi bằng nhau (4cm)	Diện tích tương ứng (cm^2)
1. Tam giác vuông cân	0,6863
2. Tam giác đều	0,7698
3. Chữ nhật (3:1)	0,7500
(2:1)	0,8889
(3:2)	0,9600
4. Vuông	1,0000
5. Quạt 60^o	0,9022
6. Tròn	1,2732
7. Nửa tròn	0,9507
8. Một phần tư tròn	0,9856

Từ bảng 22-1 ta thấy (khi cùng chu vi):

1. Hình vuông có diện tích lớn hơn hình chữ nhật;

2. Trong các hình chữ nhật, hình nào có hai cạnh gần bằng nhau nhất thì có diện tích lớn nhất;

3. Hình tứ giác có diện tích lớn hơn tam giác;

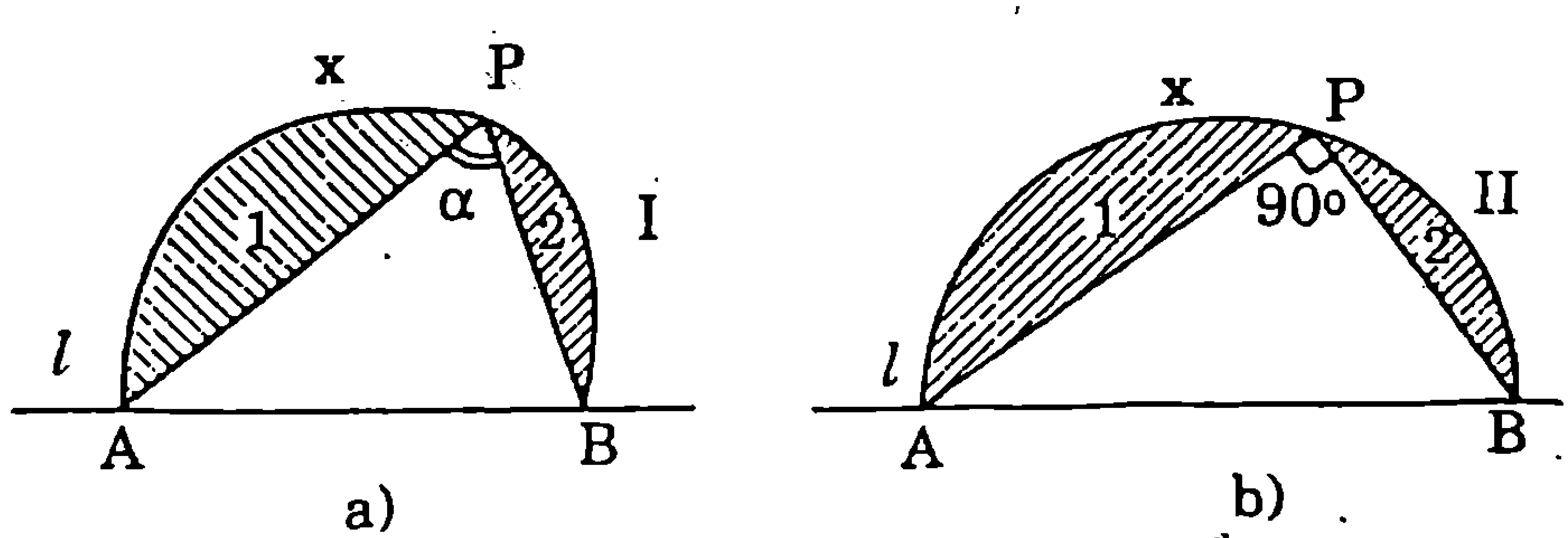
4. Đa giác đều diện tích lớn hơn đa giác không đều;

5. Hình tròn có diện tích lớn hơn cả.

Nhận xét 5 có lẽ là nguyên nhân làm cho hình tròn được sử dụng rộng rãi nhất trong thực tế và người ta nói rằng hình tròn là hình kinh tế nhất.

Bây giờ ta trở lại "Bài toán Tictous".

Giả sử phần đất nằm trong đường cung AxB là lời giải của bài toán này, tức là hình được quây bởi đường thẳng l và cung AxB có diện tích lớn nhất (hình 22-3).



Hình 22-3

Gọi P là điểm bất kì trên cung AxB, ta chứng minh $\widehat{APB}$ chắc chắn phải là góc vuông. Bởi vì, nếu $\widehat{APB} = \alpha \neq 90^\circ$ (hình 22-3a) thì chúng ta có thể vẽ được hình 22-3b có $\alpha = 90^\circ$ và S_1, S_2 khong đổi. Chiều dài đường cung của hai hình 22-3a, b rõ ràng là như nhau; nhưng diện tích của chúng:

$$S_I = S_1 + S_2 + \frac{1}{2} AP.BP.\sin\alpha$$

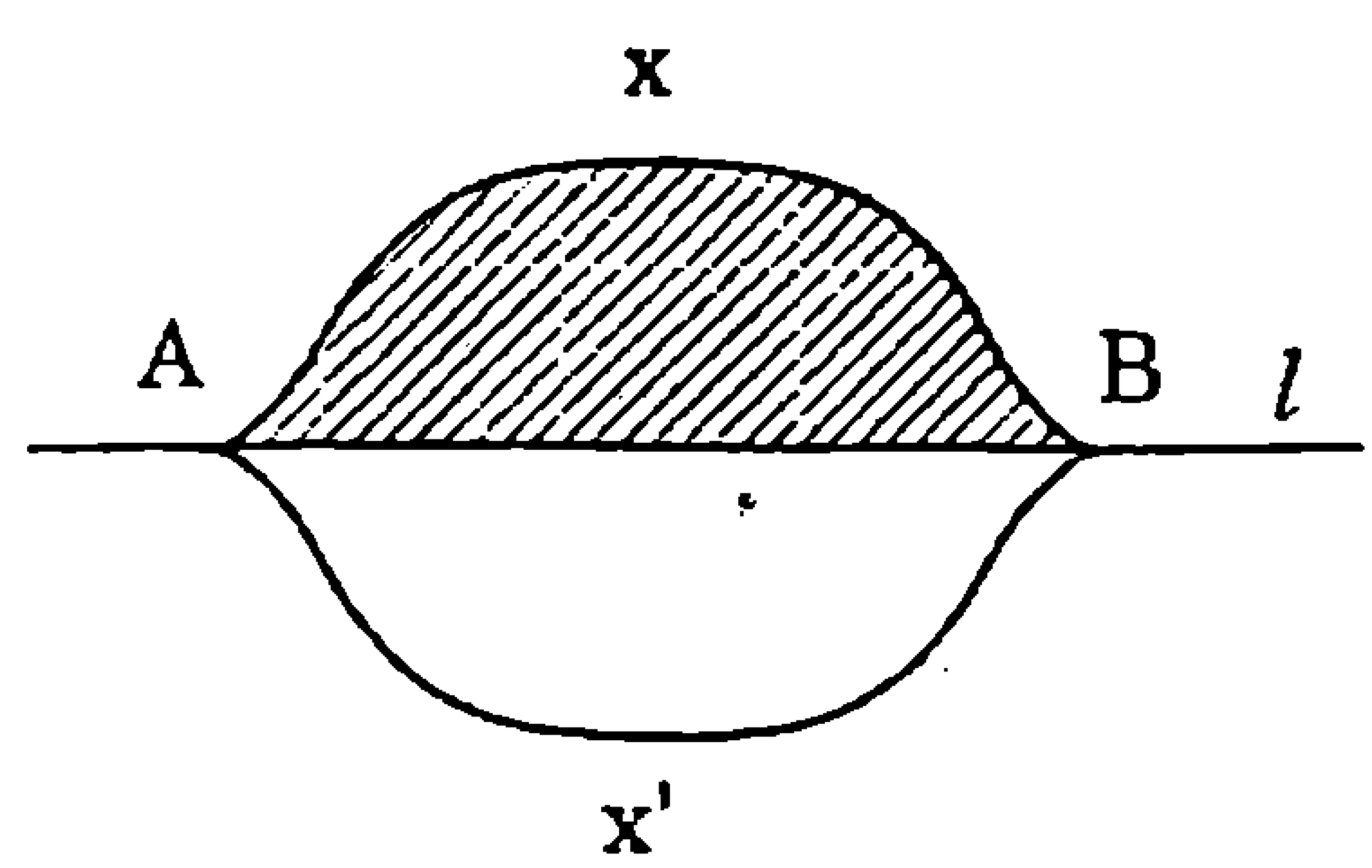
$$S_{II} = S_1 + S_2 + \frac{1}{2} AP.BP$$

Vì $\alpha \neq 90^0$, nên $S_I < S_{II}$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết: diện tích S_I là lớn nhất. Từ đó chứng minh mọi điểm trên đường cung AxB luôn tạo với A và B một góc vuông, tức là cung AxB là cung nửa đường tròn.

Chúng ta có thể không cần chứng minh "Bài toán đẳng chu" (vấn đề hình tròn), bởi vì khi đã chứng minh được "Bài toán Tictous" (vấn đề nửa hình tròn) thì coi như "Bài toán đẳng chu" cũng đã được giải quyết.

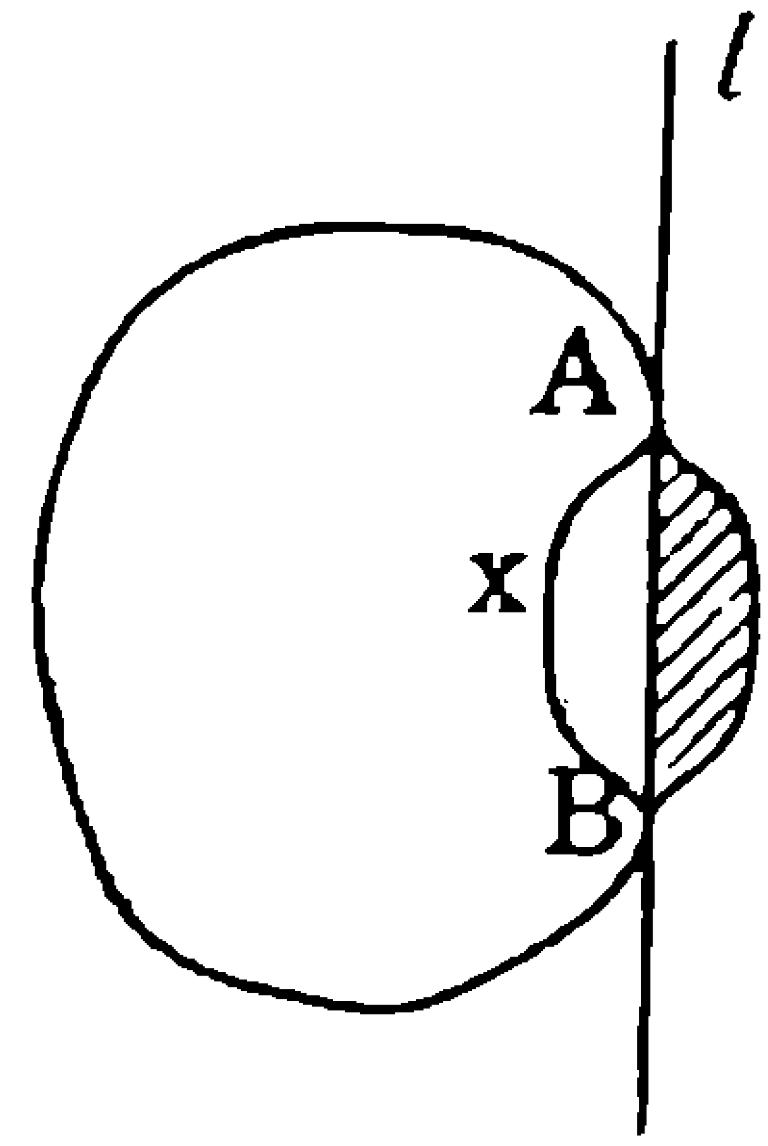
Giả sử đường bờ biển *l* là đường thẳng, còn cung AxB có chiều dài a đã quây được một diện tích lớn nhất (hình 22-4). Nếu dùng phương pháp ảnh trong gương thì diện tích do a quây được theo cung AxB và diện tích đối xứng với nó theo cung Ax'B tạo thành đều cùng lớn nhất, do vậy diện tích hình tròn do 2a quây được cũng lớn nhất.



Hình 22-4

Đồng thời, bất cứ "Bài toán Tictous" hay "Bài toán đẳng chu" cũng không thể tạo ra hình lõm được. Bởi vì, nếu là hình lõm thì có thể lật ngược để được một hình lồi có diện tích lớn hơn (hình 22-5).

Một điều nữa là, tại sao Tictous không chọn mảnh đất hình tròn mà lại chọn nửa hình tròn?

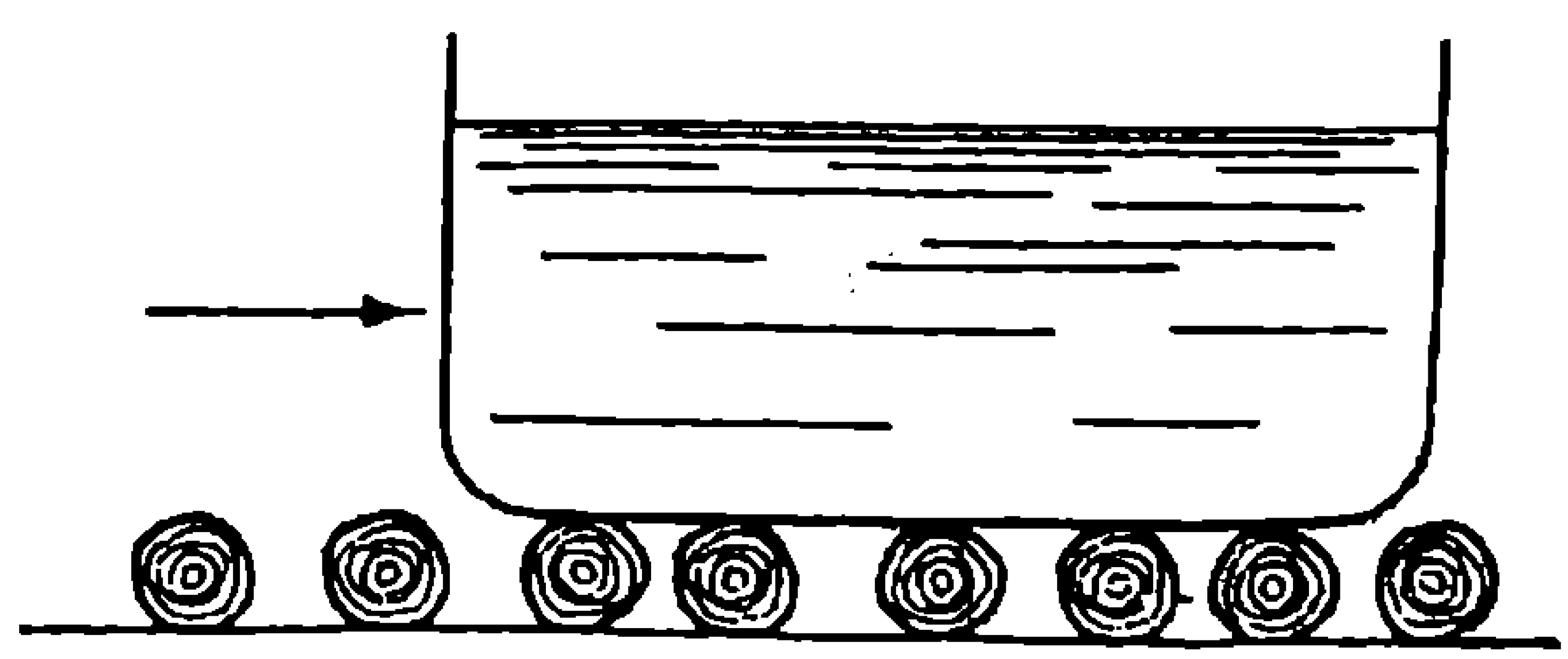


Hình 22-5

Như đã nói ở trên, bởi vì mảnh đất nằm sát biển nên nếu chọn nửa hình tròn thì đoạn đường kính (bờ biển) không cần phải quây.

Truyền thuyết kể rằng, về sau Tictous cho xây dựng thành Jathaico tại chính mảnh đất đó.

Đại thi hào Alighieri Dante (1265-1321) người Italia đã nói: "Vòng tròn là hình vẽ hoàn chỉnh nhất". Vòng tròn đã có ấn tượng rất sâu sắc đối với con người. Loài người đã tạo ra vòng tròn bằng các khoảng cách đến tâm bằng nhau. Bánh xe tròn chính là do các nan hoa bằng nhau tạo nên, khiến cho xe có chuyển động ổn định. Nếu bánh xe không tròn thì xe sẽ chuyển động lúc lên lúc xuống, làm xe không đi nhanh được, các kết cấu của xe chóng hỏng, ...

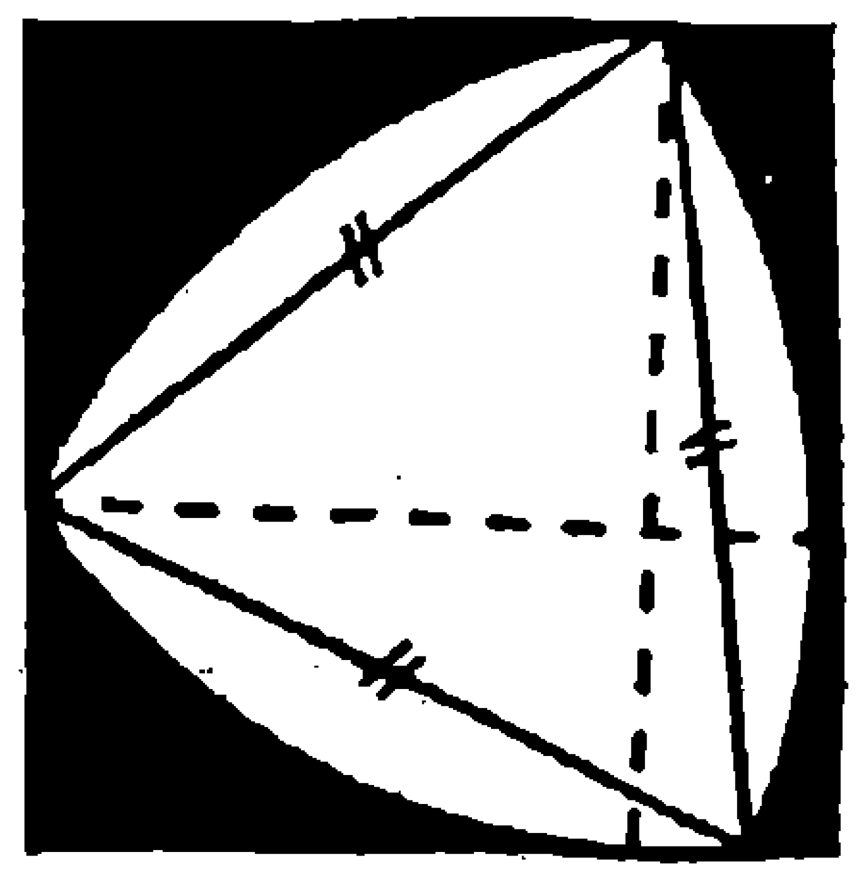

Hình 22-6

Khoảng cách giữa hai đường tiếp tuyến song song bất kỳ của vòng tròn đều bằng nhau và bằng đường kính. Điều này khiến ta có thể đặt trọng vật lên các cây gỗ tròn mà lăn và tiến lên ổn định (hình 22-6).

Bốn nghìn năm trước người Ai Cập cổ đại có lẽ đã sử dụng phương pháp này để đẩy các viên đá lớn xây dựng nên các kim tự tháp kỳ vĩ. Đến ngày nay, khi đã có rất nhiều máy móc hiện đại thì các con lăn hình tròn vẫn có tác dụng lớn. Điển hình nhất có lẽ là việc áp dụng các con lăn hình tròn để "Thần đèn" Nguyễn Cẩm Luỹ ở ấp Long Phước (xã Long Khánh, huyện Hồng Ngự, tỉnh Đồng Tháp) và các cộng sự đã di chuyển nhiều nhà và công trình nặng hàng trăm tấn đi xa hàng trăm mét.

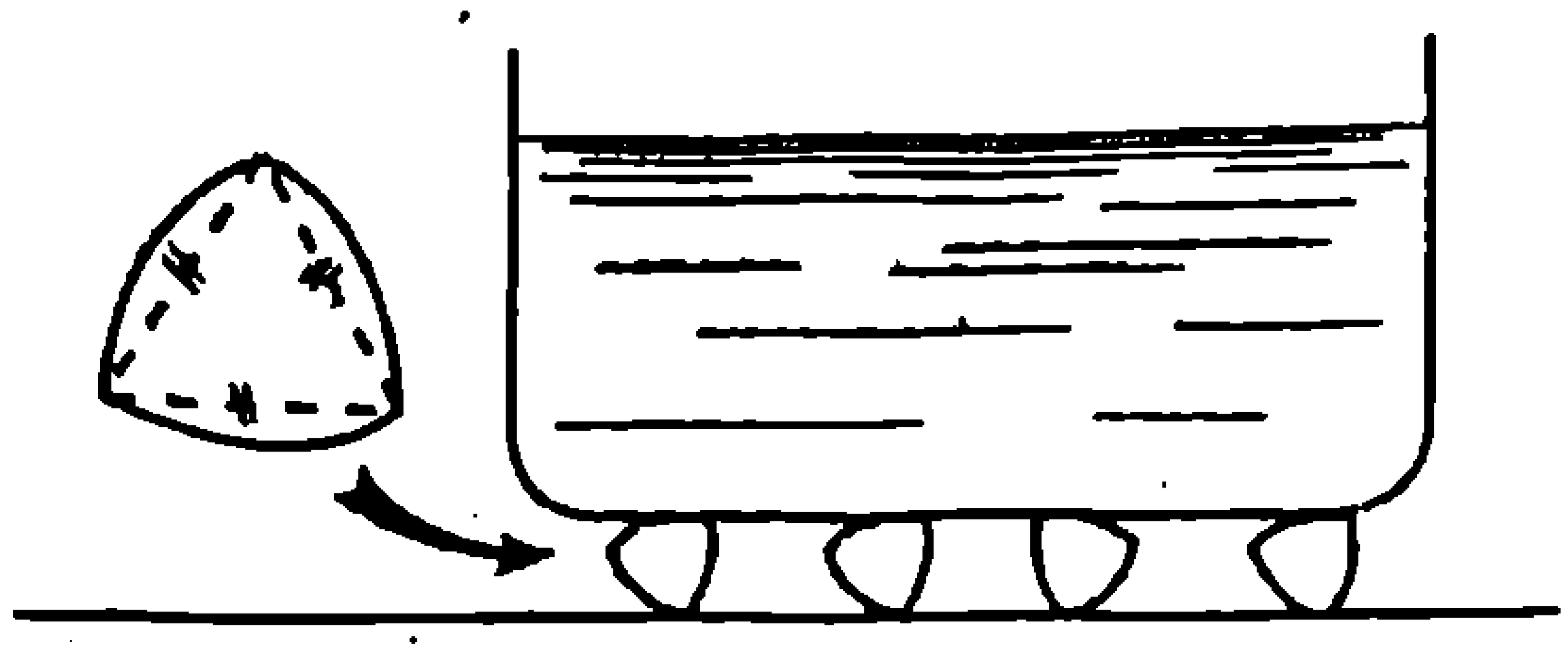
Loài người rất cảm ơn cái đặc tính "chiều rộng bằng nhau" này của vòng tròn mà thiên nhiên đã ban tặng. Giả sử không có vòng tròn thì nền văn minh của nhân loại không biết có được như ngày nay không?

Song điều làm người ta kinh ngạc là, đối với chuyển động lăn, mặt cắt ngang của con lăn không nhất thiết phải là hình tròn. Điều này làm nhiều người có thể chưa tin, nhưng đây là sự thật. Hình 22-7 là hình tam giác cạnh cong nhưng cũng có tính chất "chiều rộng bằng nhau". Ba cạnh cong là ba cung tròn bằng nhau, mà tâm của mỗi cung tròn vừa vặn là điểm đỉnh của góc đối của nó. Hiển nhiên, ba cung tròn này có bán kính đều là r. Ba dây cung này tạo nên một tam giác đều, đồng thời hình tam giác cạnh cong này lại "nội tiếp" trong hình vuông cạnh r.



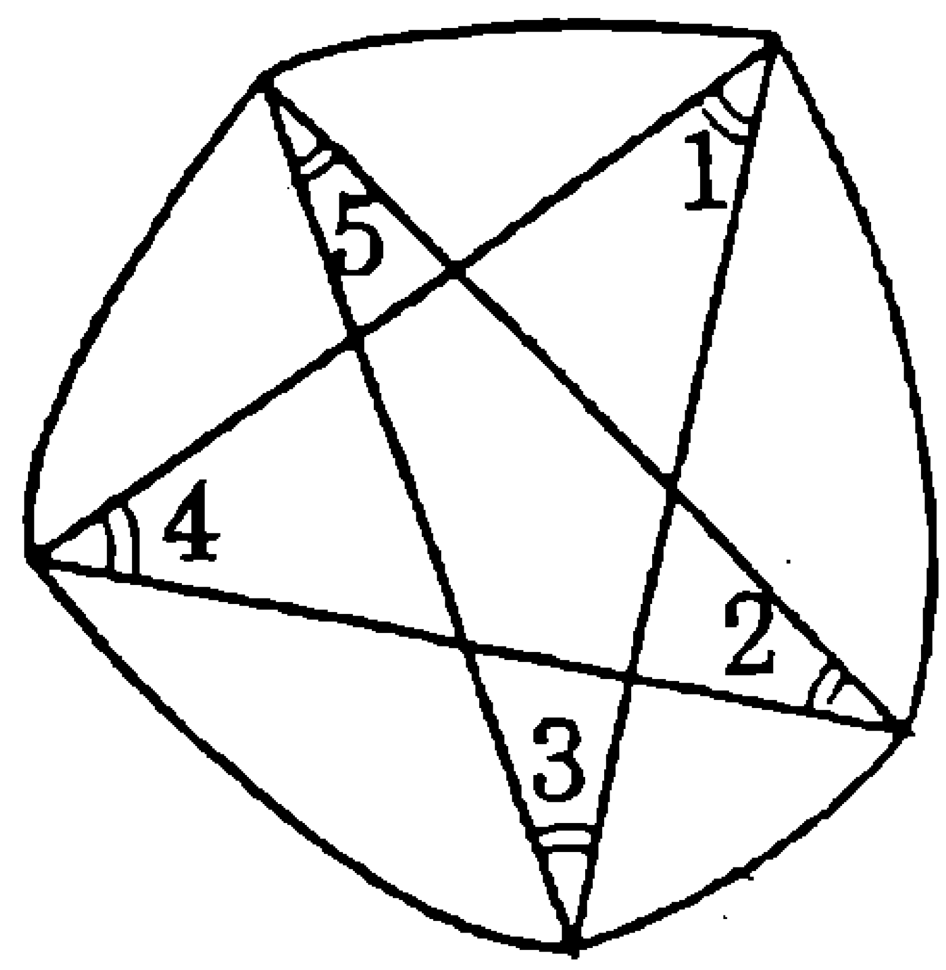
Hình 22-7

Các con lăn có mặt cắt như ở hình 22-7 cũng có thể làm cho trọng vật đặt lên đó di chuyển ổn định, không đến nỗi xóc lên xóc xuống (hình 22-8). Loại hình tam giác ba cạnh cong có công năng đặc biệt này do nhà công nghệ Rules phát hiện đầu tiên, cho nên được gọi là tam giác ba cạnh cong Rules.



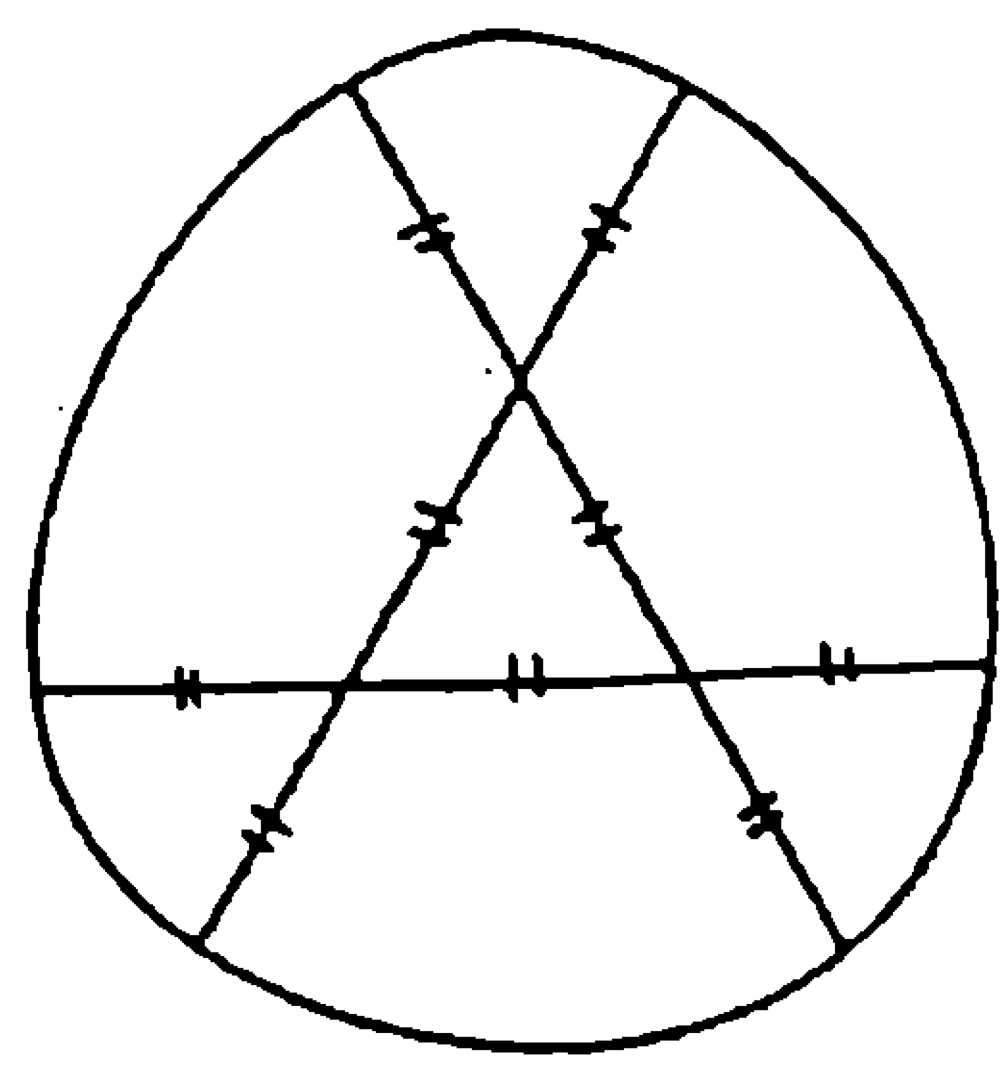
Hình 22-8

Sử dụng nguyên lý hình tam giác ba cạnh cong Rules chúng ta còn có thể tạo ra những hình cong "chiều rộng bằng nhau" khác. Mấu chốt là ở chỗ: hãy để tâm của cung tròn là đỉnh góc của góc đối của nó, từ đó vẽ ra một nhóm các cung tròn có cùng bán kính. Hình 22-9 chính là một loại hình cong này.



Hình 22-9

Hình cong "chiều rộng bằng nhau" còn có loại khác. Hình 22-10 là một hình đa giác cạnh cong do sáu cung tròn nối lại mà thành. Điều khác rõ rệt với hình tam giác ba cạnh cong Rules là chu vi không có điểm nhọn!

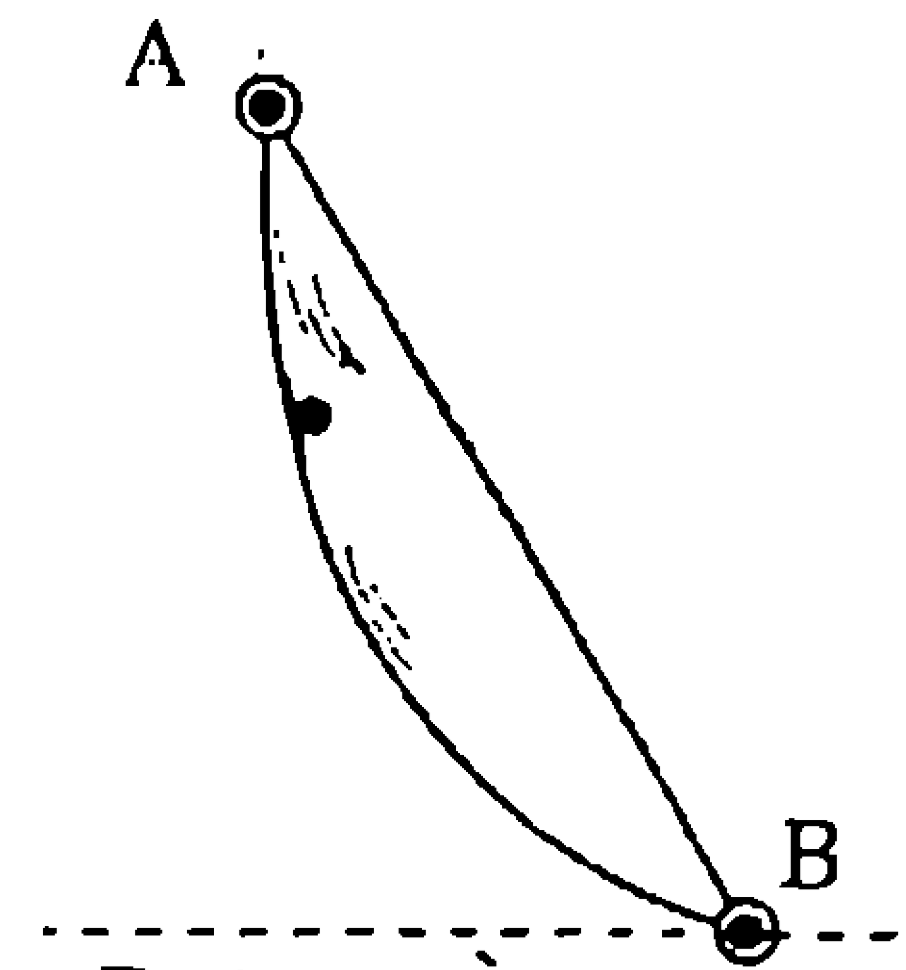


Hình 22-10

Tính chất kinh ngạc nhất của hình cong "chiều rộng bằng nhau" do C.Barbier người Bỉ phát hiện: hình cong "chiều rộng bằng nhau" có chiều rộng d bằng nhau, có chiều dài πd bằng nhau. Ở đây chúng ta không thể chứng minh định lý này, nhưng bạn đọc hoàn toàn có thể chứng minh được các trường hợp nêu ở trên.

23. PHÁT HIỆN CỦA JOHANN BERNOULLI

Ở mục 21 "Đường ngắn nhất" chúng ta chỉ nêu khúc xạ làm ví dụ. Điều này hình như đã gây sự hiểu lầm, cho rằng chỉ cần môi trường xung quanh không thay đổi thì đi theo tuyến đường ngắn là tiết kiệm thời gian nhất. Nhưng trên thực tế, chưa chắc đã như vậy!



Hình 23-1

Sau đây là một ví dụ minh họa điều này:

Bằng một đường cong như thế nào đó nối hai điểm A và B không cùng nằm trên một đường thẳng đứng để có thể dưới tác động của trọng lực, khi một vật trượt từ A đến B theo đường cong đó thì thời gian trượt ít nhất? (hình 23-1).

Đây là vấn đề "rơi nhanh nhất", đã từng được tranh cãi trong thời gian khá dài.

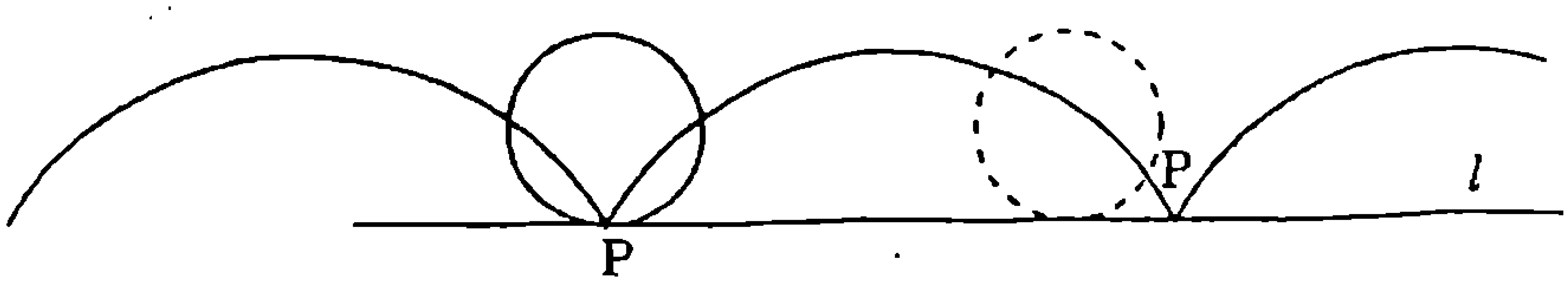
Trước thế kỉ XVI, hầu như mọi người đều cho rằng: Trượt xuống theo đoạn thẳng nối A và B sẽ tốn thời gian ít nhất. Lý do là: Trong tất cả các đường cong nối A và B thì đoạn thẳng AB là ngắn nhất. Đi quãng đường ngắn nhất sẽ tốn thời gian ít nhất. Đạo lý muôn thuở không thể sai được!

Nhưng ở đây không yêu cầu đoạn đường trượt ngắn nhất, mà là yêu cầu thời gian trượt ít nhất, do vậy muốn trả lời đúng, cần xem xét các khía cạnh có liên quan. Cần biết rằng, thời gian vật trượt không chỉ phụ thuộc chiều dài đoạn đường, mà còn phụ thuộc tốc độ trượt. Ta đã biết là, nếu đường cong dốc hơn đường thẳng AB thì tốc độ trượt của vật sẽ tăng lên (do thế năng lớn hơn). Nhưng với đường cong nào thì thời gian vật trượt đến B nhanh nhất?

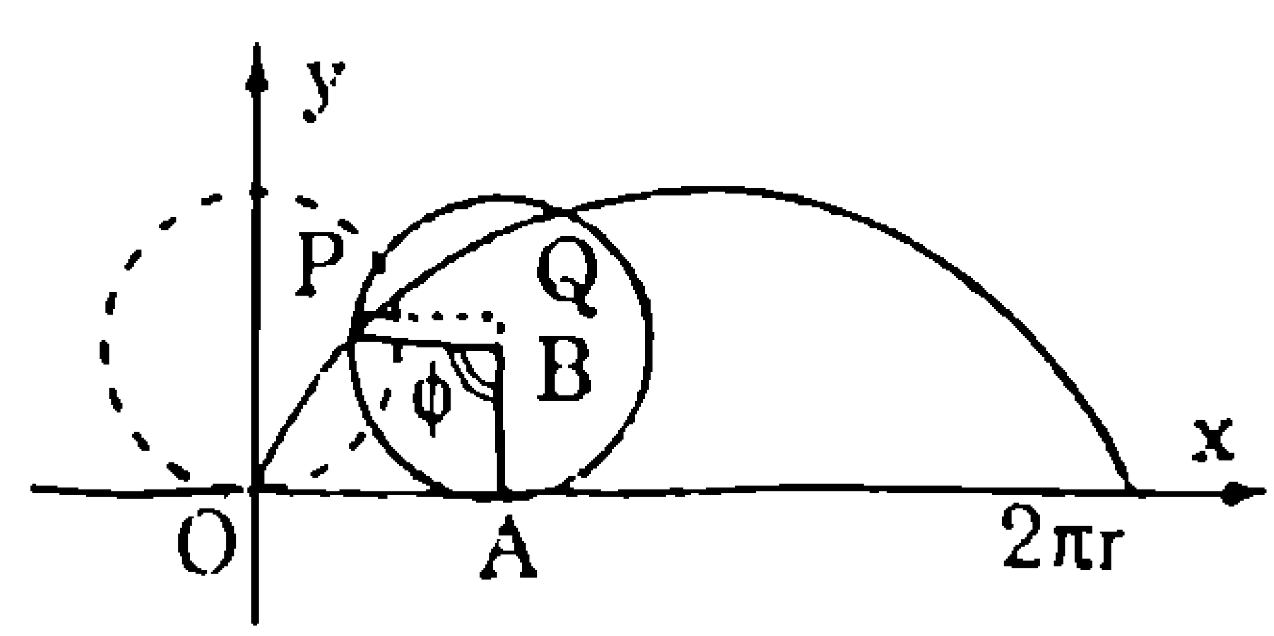
Đầu thế kỷ XVII, G.Galileo đã nghiên cứu kỹ vấn đề này. Ông cho rằng, đường cong "rơi nhanh nhất" phải là một đoạn cung tròn qua A và B mà tiếp xúc với đường thẳng tại A lý do là: Vật mới đầu trượt xuống gần với tốc độ của vật rơi tự do, tuy cung tròn AB có dài hơn dây cung AB nhưng trên con đường trượt xuống, có một đoạn dài vật trượt với tốc độ cao nên cuối cùng thời gian trượt là ít nhất.

Năm 1696, Johann Bernoulli người Thụy Sĩ đã cùng anh là Jacques Bernoulli và các nhà toán học khác, như I.Newton, ... đã tính toán theo lý thuyết và tìm ra đường cong "rơi nhanh nhất" là đường xicloit. Từ đó người ta gọi đường xicloit là đường cong "rơi nhanh nhất". Vậy đường xicloit như thế nào?

Khi một đường tròn lăn không trượt trên một đường thẳng, chẳng hạn bánh tàu hoả lăn trên đường ray *l* thì một điểm cố định P trên bánh xe sẽ vẽ một đường trong mặt phẳng thẳng đứng chứa đường ray, đó chính là đường xicloit (hình 23-2).



Hình 23-2



Hình 23-3

Đặt bán kính của bánh xe là r, lấy đường ray *l* làm trục x, dựng hệ tọa độ vuông góc xOy như ở hình 23-3. Giả sử ở trạng thái ban đầu điểm cố định P trên bánh xe trùng với điểm gốc O. Vậy sau khi bánh xe lăn một góc ϕ, tâm bánh xe lăn đến điểm B và bánh xe tiếp xúc với trục x tại A. Dựng PQ $\perp$ AB, Q là chân đường vuông góc. Rõ ràng là chiều dài cung PA bằng OA. Từ đó tọa độ điểm P(x, y) thoả mãn

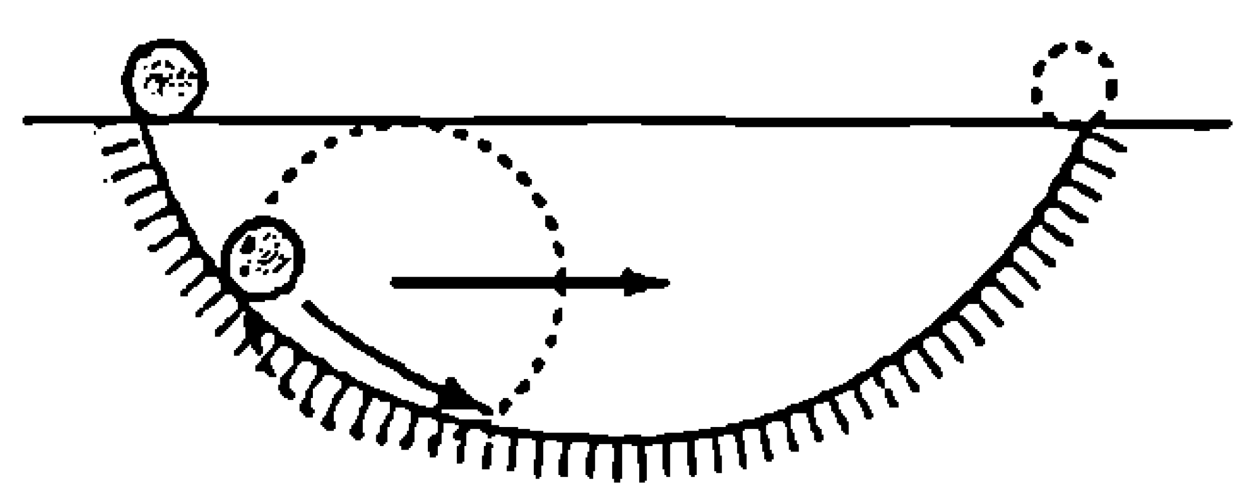
$$\begin{cases} x = OA - PQ = r\phi - r\sin\phi \\ y = AB + QB = r - r\cos\phi \end{cases}$$

tức là:

$$\begin{cases} x = r(\phi - \sin\phi) \\ y = r(1 - \cos\phi) \end{cases} \qquad (23\text{-}1)$$

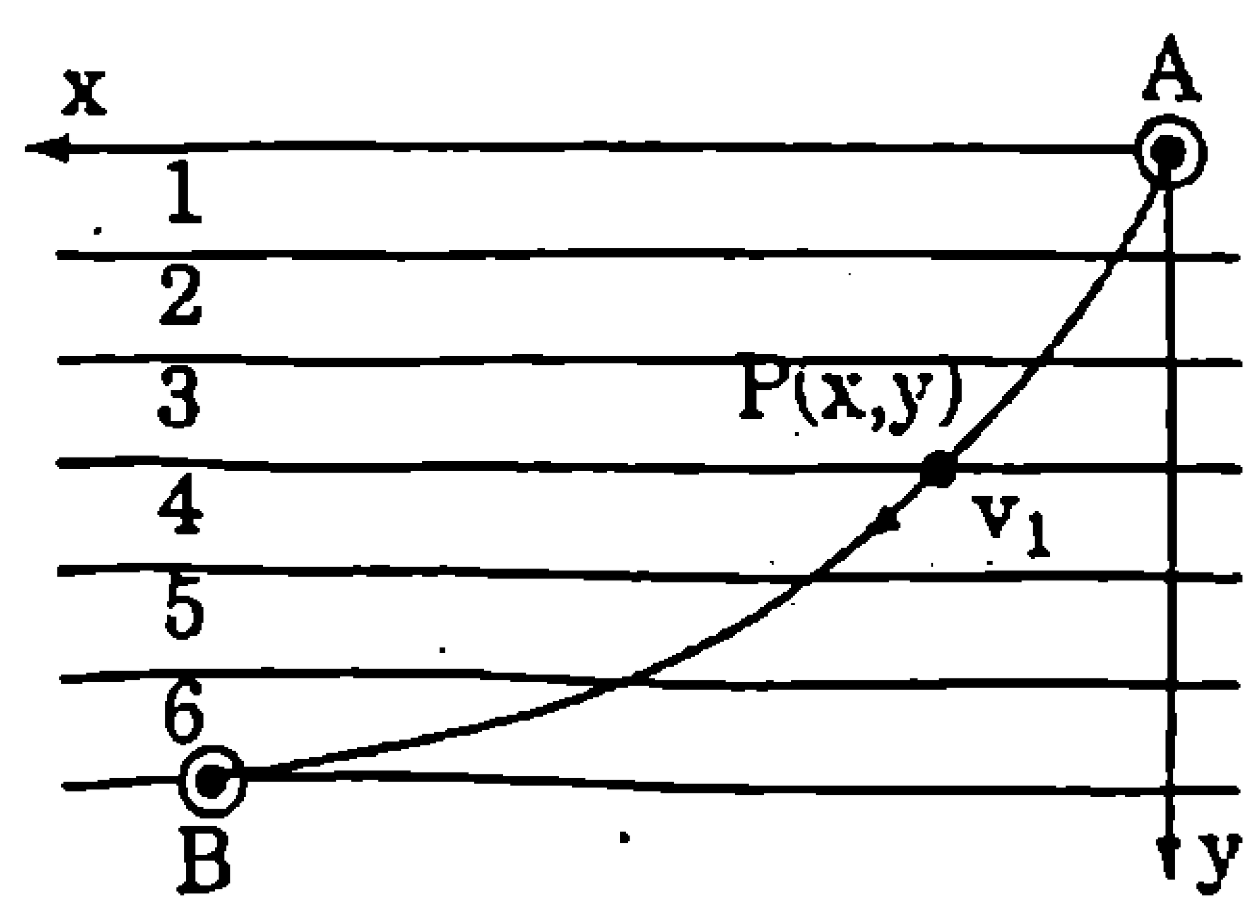
Đây chính là phương trình của đường xicloit được biểu diễn dưới dạng tham số. Tọa độ của điểm trên đường xicloit đều thay đổi theo sự biến đổi của góc quay ϕ.

Lật ngửa đường xicloit ở hình 23-3 làm cho hình lồi ban đầu biến thành một máng lõm. Rồi lại tưởng tượng điểm P thành một quả cầu thép trượt xuống theo mảng lõm. Hình ảnh trượt xuống này giống hệt như một điểm tưởng tượng trên bánh xe lăn theo đường ray với tốc độ đều (hình 23-4).



Hình 23-4

Bây giờ chúng ta hãy trở về với giải đáp đầy sáng tạo và tưởng tượng của Johann Bernoulli.



Hình 23-5

Như ở hình 23-5, chia mặt phẳng rơi thành nhiều lớp cùng khoảng cách rất nhỏ. Khi vật rơi xuống, bắt đầu từ A xuyên qua từng lớp này tới B. Do động năng của vật trượt xuống chỗ P(x, y) bằng sự giảm nhỏ của thế năng trong quá trình rơi nên:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

tức là: $$v = \sqrt{2gy} \qquad (23\text{-}2)$$

Biểu thức (23-2) chứng tỏ rằng: lúc này tốc độ chuyển động của vật chỉ liên quan tới lớp mà nó đang hiện diện. Nói cách khác, trong mỗi lớp vật đều có tốc độ chuyển động riêng khác nhau.

Cứ như vậy, Johann Bernoulli liên tưởng ngay tới khúc xạ của ánh sáng: tia sáng chiếu từ điểm A, khúc xạ qua từng lớp, từng lớp một tới điểm B. Đường mà tia sáng này đã đi, chính là đường cong "rơi nhanh nhất".

Như vậy, từ một vấn đề hiểm hóc, Johann Bernoulli đã dùng một loại giải tích khôn khéo để chứng minh một cách dễ hiểu.

Công việc tiếp theo đã rất quen thuộc với các nhà toán học. Giả sử tốc độ của ánh sáng trong các lớp vừa vặn bằng tốc độ trượt xuống của vật trong lớp đó, riêng rẽ bằng v_1, v_2, v_3, ...; góc tới khi tiến vào các lớp lần lượt là α_1, α_2, α_3, ... (hình 23-6). Từ định luật khúc xạ của ánh sáng, ta có:

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \frac{\sin\alpha_3}{v_3} = \ldots$$

Khi số lớp chia ra nhiều vô hạn,

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \text{Đại lượng không đổi.} \qquad (23\text{-}3)$$

Chú ý tới giữa góc nghiêng β của tiếp tuyến đường cong với góc tới α tồn tại quan hệ:

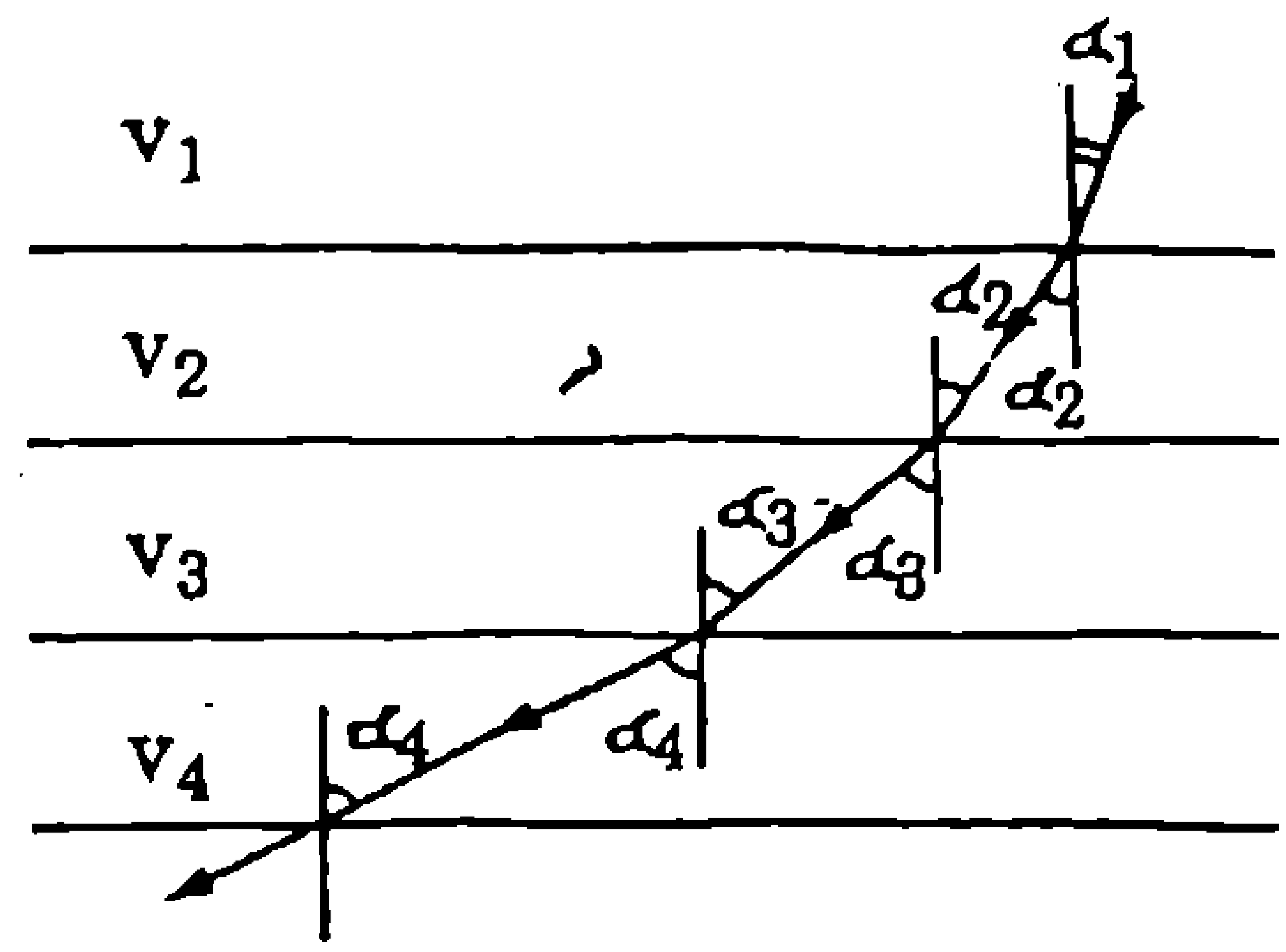
$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} \qquad (23\text{-}4)$$

trong đó: $$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = y' \qquad (23\text{-}5)$$

Từ (23-5), ta có:

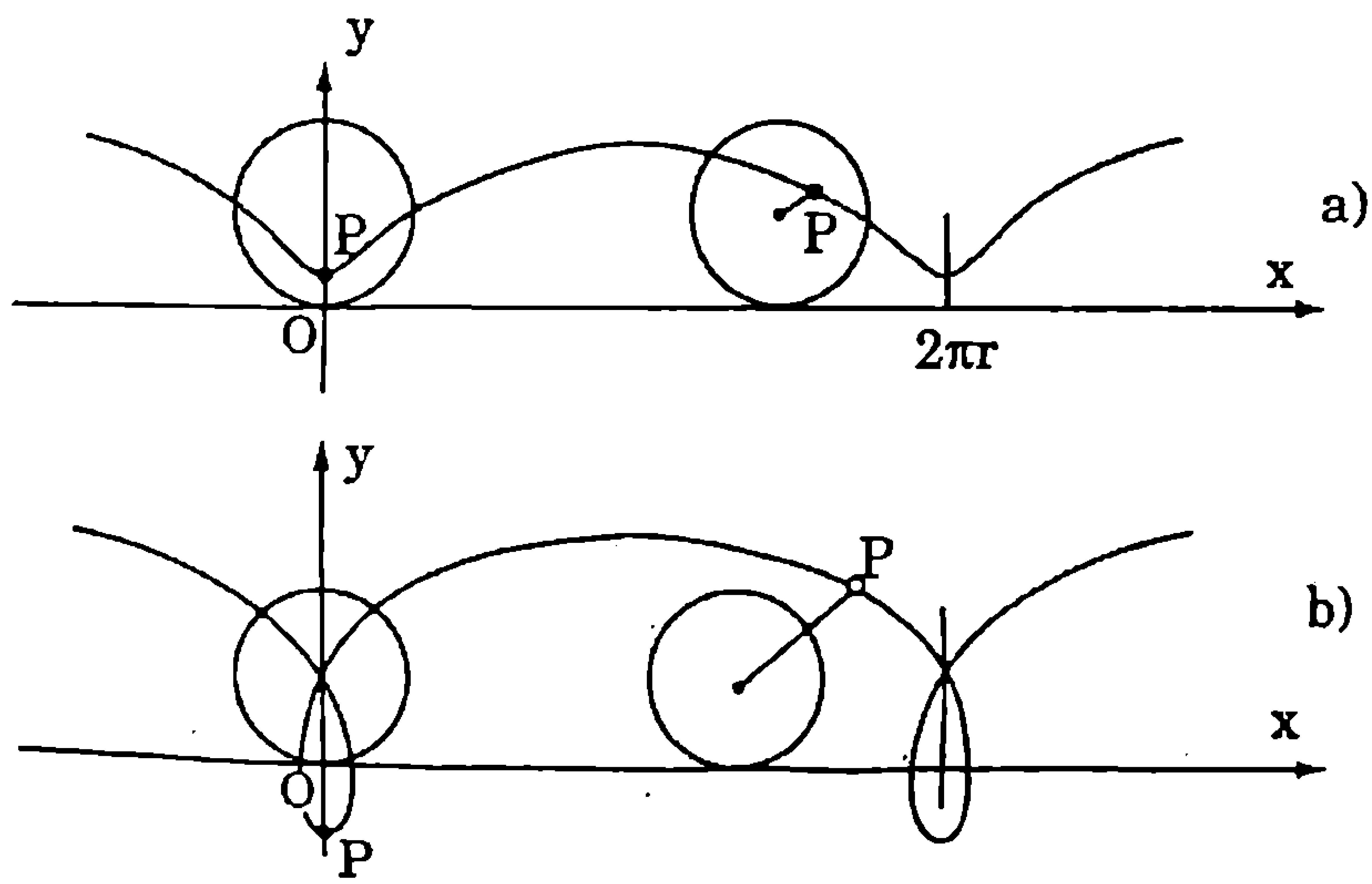
$$y(1+y'^2)=y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \text{Đại lượng không đổi.} \qquad (23\text{-}6)$$

Biểu thức (23-6) là một phương trình vi phân. Do việc giải loại phương trình này cần kiến thức toán học nhiều, cho nên ta không có điều kiện trình bày ở đây. Chỉ biết rằng nghiệm của nó chính là "đường xicloit" đã nêu ở trên.



Hình 23-6

Loại "đường xicloit" có rất nhiều. Khi điểm P ở ngoài vòng tròn chuyển động hoặc trong vòng tròn chuyển động, có thể lần lượt được "đường xicloit" có biên độ ngắn (hình 23-7a) hoặc có biên độ dài (hình 23-7b).

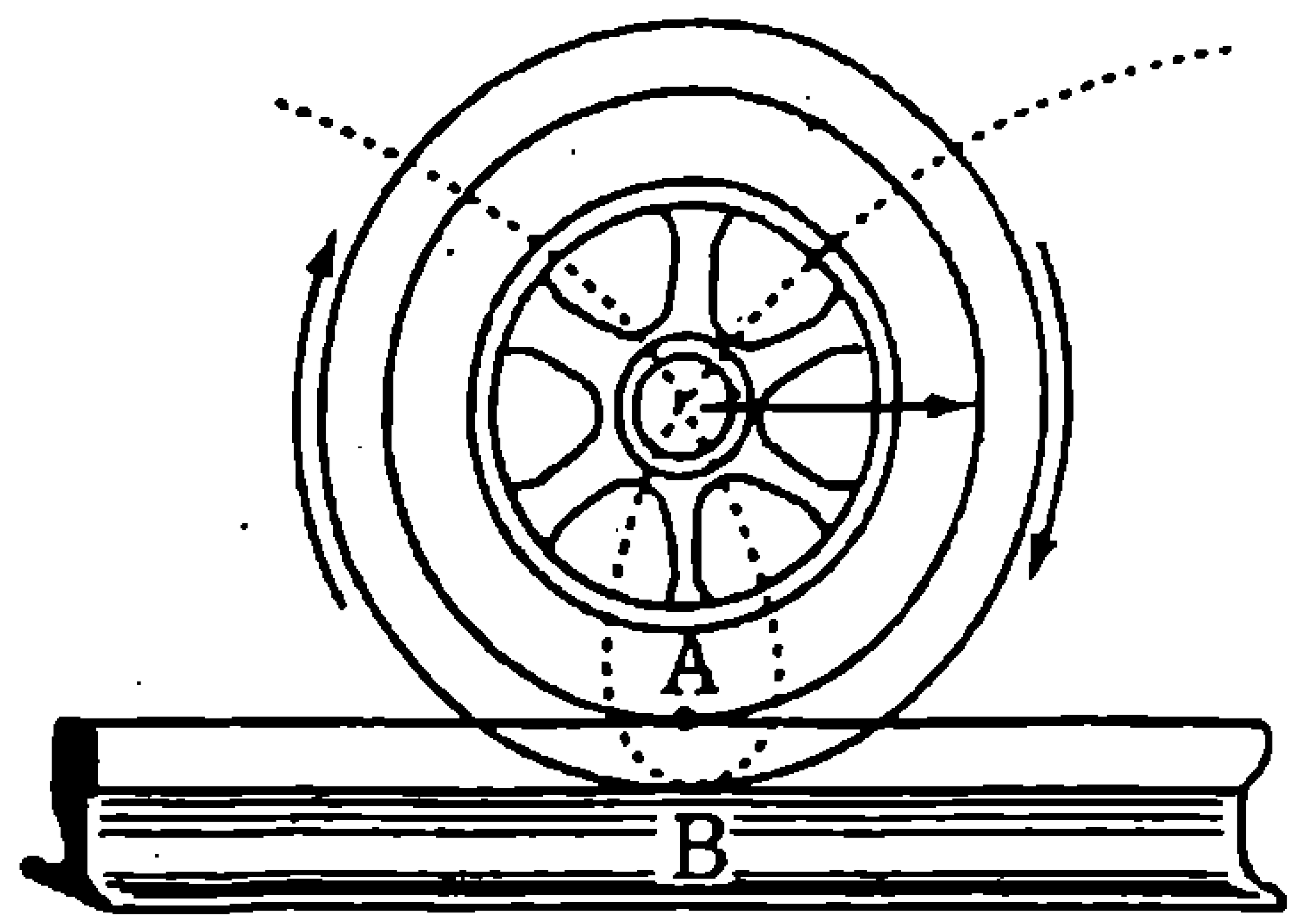


Hình 23-7

Bạn đọc thân mến!

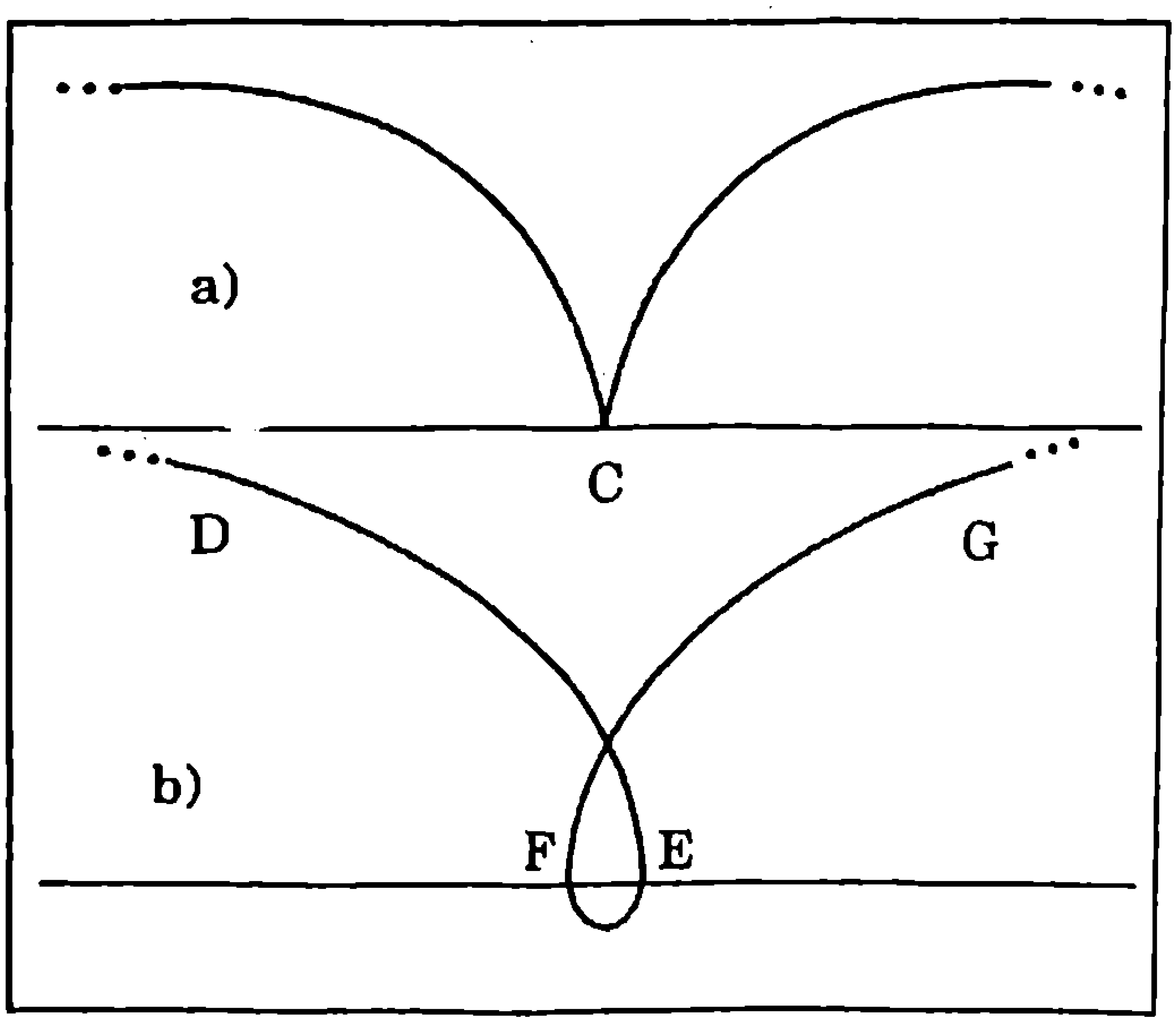
Bạn đọc có tưởng tượng được rằng, trên bánh xe tàu hoả lại có điểm chuyển động ngược lại hướng chạy của đoàn tàu không?

Bánh xe tàu hoả gồm vành bánh (vành nhỏ) tiếp xúc với mặt trên của đường ray và mép bánh (vành lớn) để định vị tàu theo hai đường ray. Ta hãy xem hai điểm đặc biệt: A ở vành bánh và B ở mép bánh (hình 23-8).



Hình 23-8

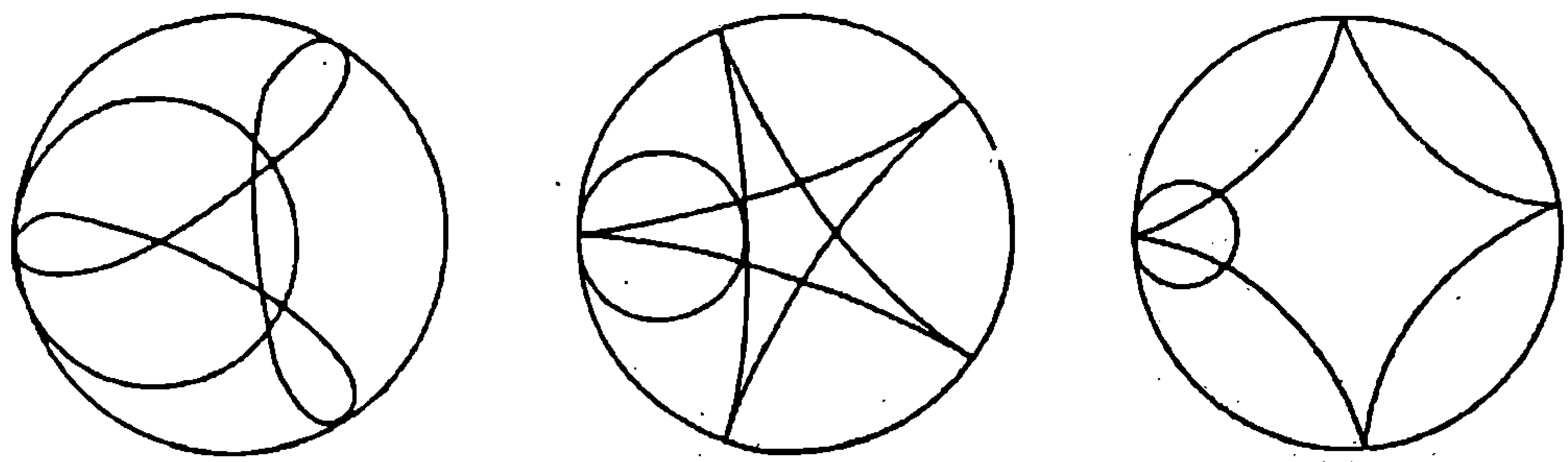
Khi tàu đang chạy, quỹ đạo của điểm A như ở hình 23-9a. Quỹ đạo này có một điểm dừng tại C, còn tại các thời điểm khác điểm A vẫn tiến theo hướng của đoàn tàu.



Hình 23-9

Quỹ đạo của điểm B như ở hình 23-9b. Quỹ đạo này chia làm ba đoạn khác nhau: đoạn từ D đến E, điểm B chuyển động theo hướng của đoàn tàu, đoạn từ E đến F, điểm B chuyển động theo hướng ngược lại của đoàn tàu và đoạn từ F đến G, điểm B trở lại chuyển động theo hướng của đoàn tàu.

Nếu đoàn tàu chuyển động khi lăn không theo đường thẳng mà theo vòng tròn xác định, cũng có thể thu được những "đường xicloit" muôn màu muôn vẻ. Tất cả thành viên của họ nhà "đường xicloit" này đều rất đẹp (hình 23-10).



Hình 23-10

24. VƯỢT QUA RÀO CẢN CỦA TƯ DUY CỐ HỮU

Qua từng thời kỳ phát triển, loài người đã hình thành những khuôn mẫu được coi là chuẩn mực. Tuy vậy, có một số chuẩn mực của thời trước lại không phù hợp ngày nay, có những cái đúng bây giờ nhưng tương lai có thể sai, ...

Một ví dụ rất điển hình: Trên bàn đặt một quả cầu, dùng tay đánh bật nó ra khỏi bàn. Rất nhiều người cho rằng quả cầu sẽ rơi theo đường parabol nhưng thực tế không phải như vậy. Bạn đọc có thể thử xem, sẽ thấy kết quả ngoài dự đoán của con người!

Mọi người quen dùng thói quen quá khứ để lý giải hiện tại và quen dùng hiện tại để tưởng tượng tương lai. Một số mô thức tư duy cố hữu thường cản trở suy nghĩ, tạo thành rào cản vô hình.

Câu chuyện sau đây làm nhiều người kinh ngạc:

Khối 9 của một trường Trung học cơ sở có bốn lớp A, B, C và D, trong đó A và B là hai lớp chọn, C và D là hai lớp bình thường. Số học sinh bốn lớp lần lượt là 50, 60, 50 và 40. Hai giáo viên 1 và 2 được phân công dạy: 1 dạy hai lớp A và C, 2 dạy hai lớp B và D. Cuối năm thi tốt nghiệp kết quả như bảng 24-1.

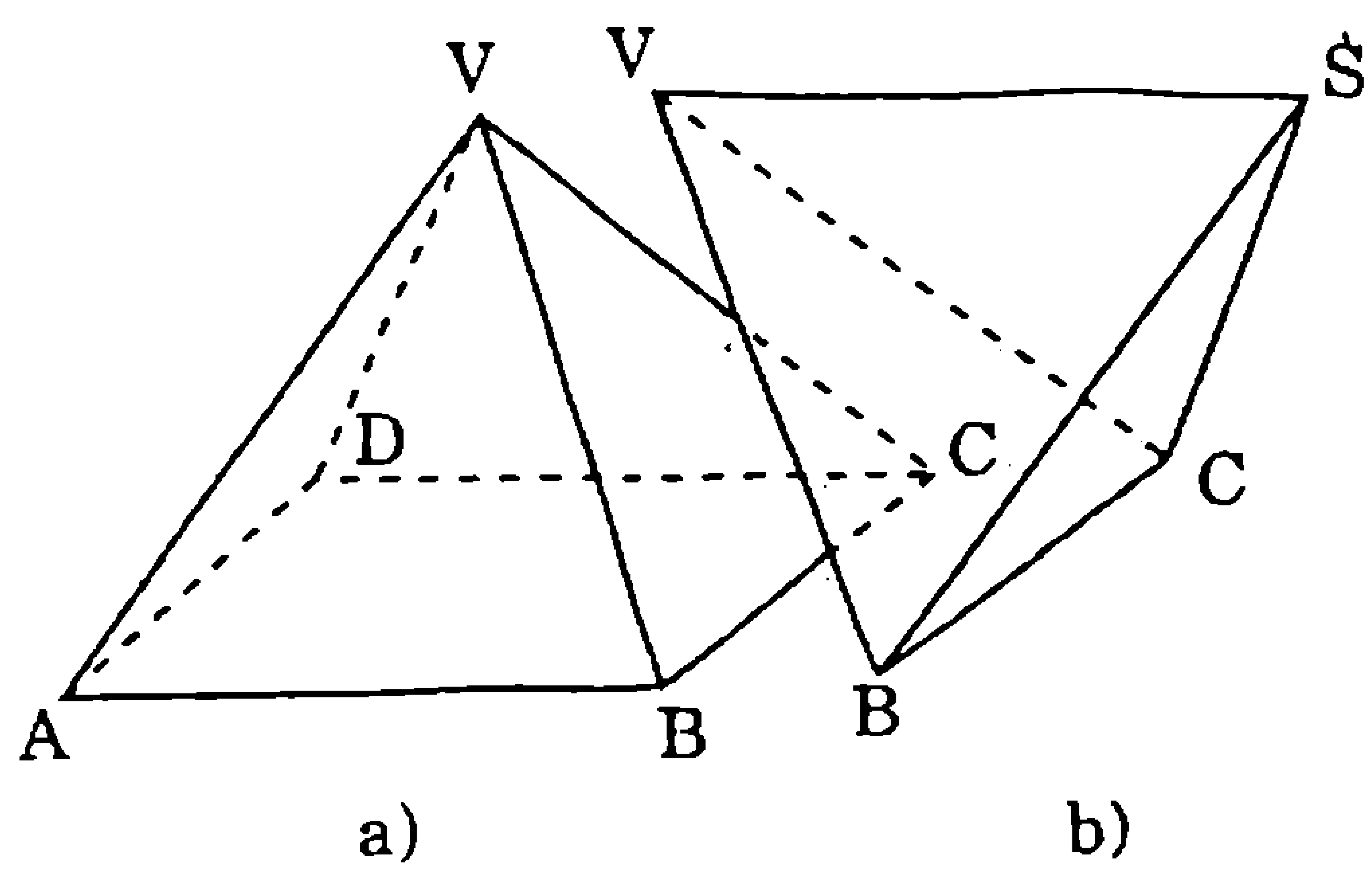
Bảng 24-1

Giáo viên	Tỷ lệ đỗ của lớp chọn %	Tỷ lệ đỗ của lớp bình thường %
1	84	42
2	80	40

Từ kết quả như bảng 24-1, hiệu trưởng gọi giáo viên 2 phê bình và bắt ông ta tìm nguyên nhân tại sao mà lớp giáo viên 2 dạy lại đạt kết quả thấp. Không ngờ giáo viên 2 khẳng định rằng, người đáng biểu dương phải là ông ta! Hiệu trưởng lấy làm lạ, lấy giấy bút ra tính toán cẩn thận thì quả thật tỷ lệ đỗ tốt nghiệp của học sinh do giáo viên 2 dạy cao hơn giáo viên 1 dạy đúng 1%. Bạn đọc không tin thử tính mà xem!

Sự kiện sau đây xảy ra ở nước Mỹ.

Một năm gần đây nhà nước tổ chức thi toán toàn quốc, có khoảng 83 vạn học sinh dự thi, tổng cộng có 50 đề thi, trong đó có đề thứ 44 như sau:



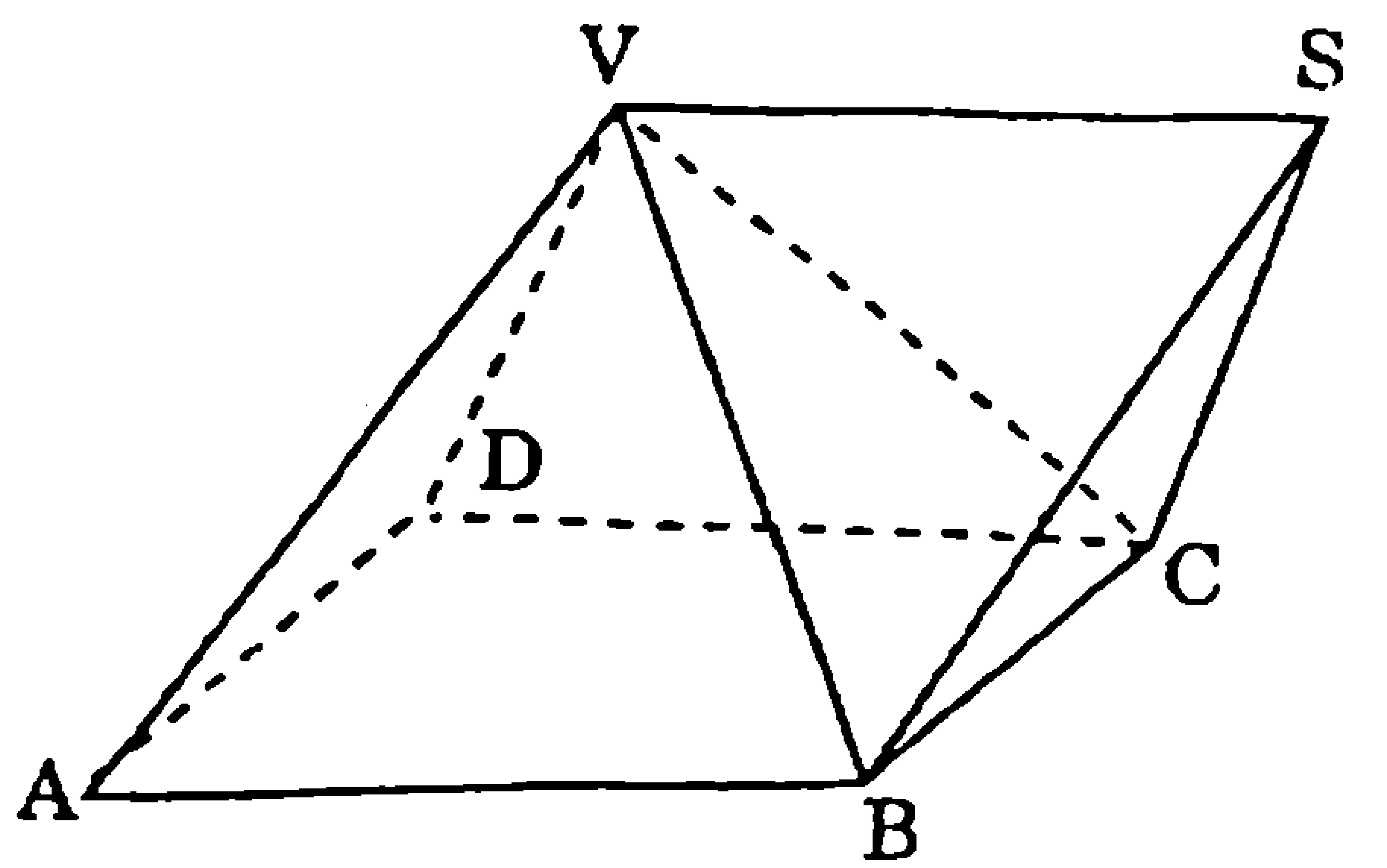
Hình 24-1

"Một hình chóp tứ giác đều (hình 24-1a) và một hình chóp tam giác đều (hình 24-1b) có tất cả các cạnh đều dài bằng nhau.

Hỏi sau khi chồng khớp một mặt với nhau thì hình mới có mấy mặt?".

Đáp án chuẩn ghi là "7 mặt".

Một học sinh tên là Danier trả lời là "5 mặt" nên bị coi là trả lời sai và không được điểm. Danier không chịu nên xin gặp hội đồng chấm thi để khiếu nại. Các giáo sư trong hội đồng vẫn cho điểm theo đáp án chuẩn. Về nhà Danier trình bày với bố. Bố cậu là một công trình sư. Ông đã cho làm mô hình mới sau khi chồng khớp thì chỉ còn "5 mặt"! (hình 24-2). Danier đưa mô hình đến trường để hội đồng chấm thi xem xét thì đúng là như vậy. Từ đó cậu ta trở thành học sinh nổi tiếng.



Hình 24-2

Câu chuyện trên đây thật tuyệt vời. Nó ca ngợi tư duy sáng tạo, dám vượt qua rào cản của tư duy cố hữu để xây dựng hệ tư tưởng chuẩn xác!

MỤC LỤC

Trang

NHỮNG CÂU CHUYỆN LÝ THÚ VỀ HÀM SỐ

NGUYỄN BÁ ĐÔ

NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ

Số 9 - Ngõ 26 - Phố Hoàng Cầu - Q.Đống Đa - TP.Hà Nội

VPGD: Số 45 TT2 KĐT Văn Phú - Q.Hà Đông - TP.Hà Nội

ĐT: (04). 66860751 - (04). 66860752

Email: nxbdantri@gmail.com

Website: nxbdantri.com.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:

BÙI THỊ HƯƠNG

Chịu trách nhiệm bản thảo:

NGUYỄN PHAN HÁCH

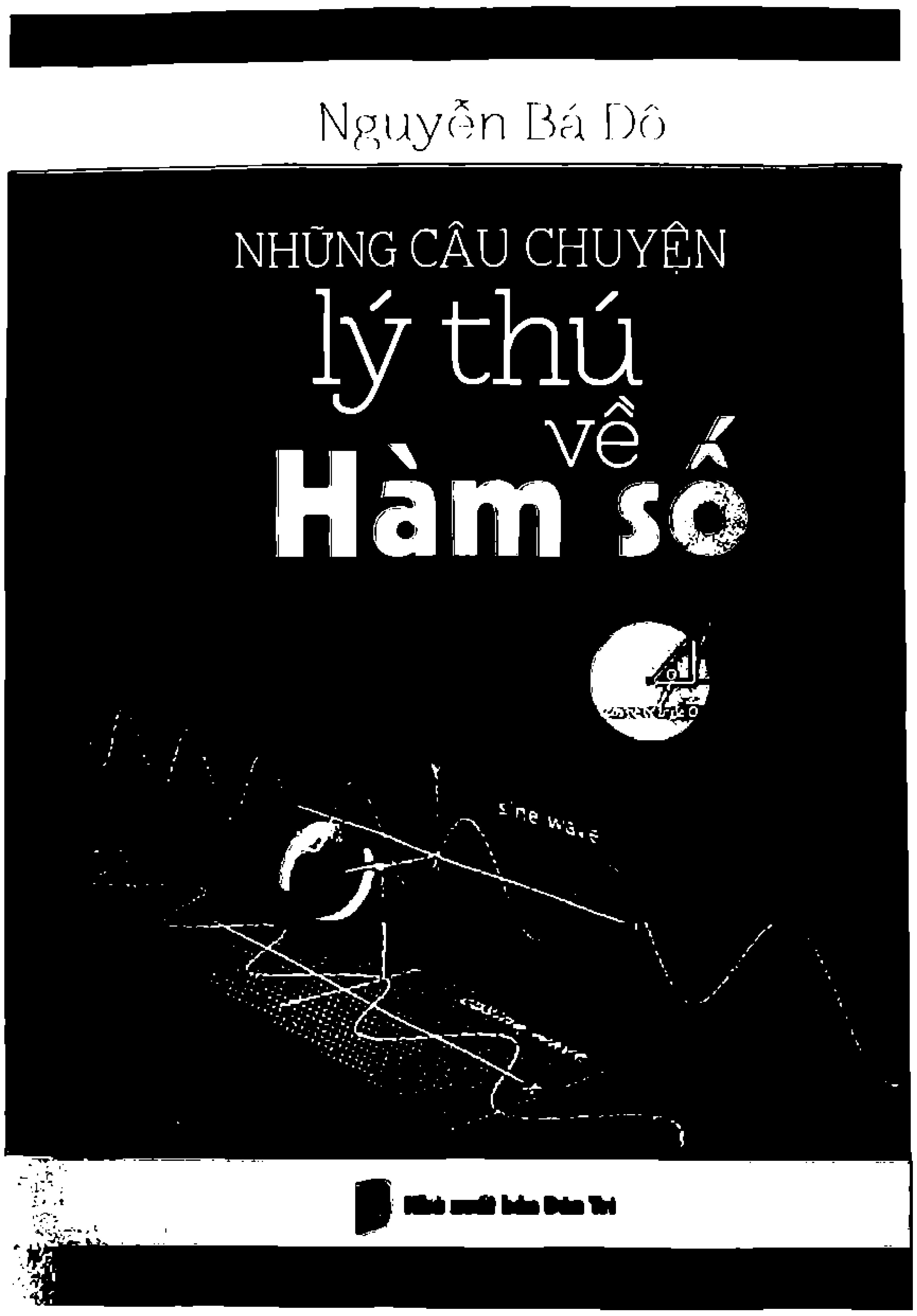
Biên tập:	**HÀ ĐĂNG**
Vẽ bìa:	**THẮM NGUYỄN**
Sửa bản in:	**THU HÀ**
Chế bản:	**THU HUẾ**

In 1000 cuốn, khổ 14,5x20,5 cm tại Công ty CP In và TM HTC.

Số đăng ký KHXB số: 310-2013/CXB/7-14/DT

Quyết định xuất bản số: 310-7/QĐXB/NXBDT do Nhà xuất bản Dân trí cấp ngày 10 tháng 12 năm 2013.

In xong, nộp lưu chiểu quý I năm 2014.



NHỮNG CÂU CHUYỆN LÝ THÚ VỀ HÀM SỐ

9 786049 297878

Giá: 38.000đ