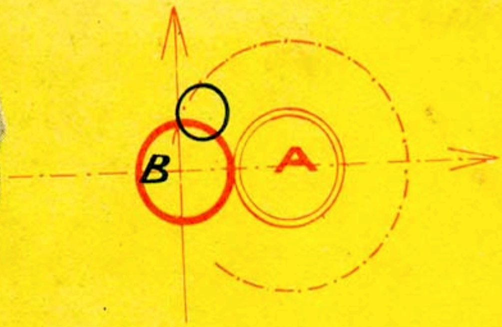
LÊ HẢI CHÂU



DANH NHÂN TOÁN HỌC

GD

LÊ HẢI CHÂU

DANH NHÂN TOÁN HỌC

1. ACSIMET 2. APÔLÔNIUT 3. BECNULI 4. BƠĐU
5. BUNHIACÔPXKI 6. CÔSI 7. ĐÊCAC 8. ĐIÔPHĂNG
9. ĐIRISƠLÊ 10. FECMA 11. FIBÔNAXI 12. GALOA
13. GAUXƠ 14. HIPÔCRAT 15. HÊRÔNG 16. LAGRĂNG
17. LEBNIT 18. LÔBASEPXKI 19. MÊNÊLAUT 20. NIUTƠN
21. ƠCLIT 22. ƠLE 23. ƠRATÔXTEN 24. PATXCAN
25. PITAGO 26. SALƠ 27. TALET 28. VIET

- otoanhoc2911@gmail.com -

Nhà xuất bản Giáo dục * 1989

Biên soạn : LÊ HẢI CHÂU

Biên tập : PHAN THANH QUANG

Bìa : ANH TOÀN

Biên tập mĩ thuật : THU YÊN

Sửa bản in : THANH LAN

LỜI NÓI ĐẦU

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC xin giới thiệu với bạn đọc cuốn **Danh nhân toán học** *của tác giả Lê Hải Châu.*

Trong cuốn này tác giả giới thiệu những nét chính về cuộc đời và sự nghiệp của các nhà toán học nổi tiếng trên thế giới. Công trình của họ đã đánh dấu những mốc phát triển của toán học từ thời trước công nguyên (với Pitago, Ơclit...) đến thời cận đại (với Lôbasepxki, Galoa...).

Cuộc đời và sự nghiệp của các nhà toán học là những tấm gương sáng về tinh thần lao động say mê, bền bỉ, tinh thần thực sự cầu thị, óc dám nghĩ, dám khai phá những con đường mới đầy chông gai, đức tính hi sinh ; tinh thần xả thân vì khoa học, vì lí tưởng ; tình bạn chân thành ; tinh thần nhân đạo cao cả v.v..

Và vượt lên tất cả là tinh thần lao động sáng tạo không ngừng, đến phút cuối cùng của cuộc đời vẫn chưa ngừng lao động sáng tạo.

Cuốn sách này nhằm phục vụ người đọc có trình độ phổ thông về toán, nên tác giả chủ yếu giới thiệu các nhà toán học có tên trong chương trình phổ thông.

Ngoài ra tác giả cũng nói đến một số nhà toán học khác như Lôbasepxki, Galoa, vì cuộc đời và sự nghiệp của họ có nhiều nét độc đáo, đầy kịch tính, chắc chắn sẽ đem lại cho bạn đọc những bài học bổ ích.

Để tiện việc tra cứu, chúng tôi sắp xếp tên các nhà toán học theo thứ tự chữ cái.

Nhà Xuất Bản Giáo Dục mong bạn đọc gửi cho những nhận xét về nội dung sách để có thể sửa chữa trong lần in sau. Xin chân thành cảm ơn các bạn.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

ACSIMET

NHÀ BÁC HỌC TOÀN DIỆN

Học hình học ở lớp đầu phổ thông trung học, chúng ta đã biết tiên đề liên tục để đo đoạn thẳng, đó là tiên đề Acsimet.

Acsimet là nhà hình học, nhà cơ học, kĩ sư quân sự lỗi lạc của thế kỉ thứ 3 trước công nguyên, sống ở đảo Xixin (nay thuộc nước Italia) tại thành phố Xiracudơ.

Acsimet là con trai của nhà thiên văn Phiđi, tác giả cuốn sách về đường kính Mặt trời và Mặt trăng. Thời đó các gia đình giàu sang thường chăm lo cho con cái có một nền học vấn toàn diện mà trọng tâm là triết học và văn chương, còn toán học thì được coi là môn phụ. Thường họ chỉ học toán vì toán cần cho triết học. Gia đình Acsimet trái lại chăm lo con một cách đặc biệt. Bố ông đã đưa ông đi sâu vào toán và thiên văn là những lĩnh vực mà sau này ông có những sáng tạo vĩ đại nhất.

CÂU CHUYỆN ƠRÊCA !

Nhiều câu chuyện lí thú về ông đã được truyền lại tới ngày nay.

« Cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nâng cả Quả đất lên ». Câu nói có vẻ truyền thuyết đó mà người ta kể lại là của Acsimet khi ông phát minh ra đòn bẩy.

Người ta cũng thường kể lại câu chuyện về việc Acsimet tìm ra định luật về vật nổi. Quốc vương Ghiêrôn yêu cầu Acsimet tìm cách kiểm tra lại một đồ vật bằng vàng mà nhà vua thuê đúc, xem có thật là nguyên chất hay không. Ông suy nghĩ hết ngày này qua ngày khác mà vẫn chưa tìm được cách kiểm tra.

Một lần đang tắm ở sông ông chú ý đến sức đẩy của nước lên người mình. Thế là quên cả mặc quần áo ông vùng chạy lên và kêu to « Urêca ! » (tức là tìm ra rồi). Sức đẩy của nước lên người ông đã gợi cho ông cách giải bài toán, và từ đó ông đã tìm ra định luật mang tên ông.

ACSIMET, NHÀ THIÊN VĂN NỔI TIẾNG

Trong cuốn « Tính toán hạt cát » Acsimet đã mô tả một dụng cụ mà ông đã sáng tạo để đo đường kính của Mặt trời. Mục đích chính của cuốn sách này là chỉ ra phương pháp thuận tiện có thể biểu diễn các số lớn hơn số các hạt cát lấp đầy toàn bộ không gian vũ trụ.

Acsimet cho rằng Quả đất nằm ở trung tâm vũ trụ và ông đã tính khoảng cách từ Quả đất đến Mặt trăng, từ Mặt trăng đến sao Kim, đến sao Thủy, đến Mặt trời, đến sao Hỏa, đến sao Mộc, đến sao Thổ và cuối cùng đến những ngôi sao khác.

Là nhà thiên văn nổi tiếng, Acsimet đã sáng tạo ra nhà vũ trụ với hình cầu rỗng quay do hệ thống máy móc bên trong, dùng để tạo lại chuyển động của Mặt trời, của Mặt trăng và của năm hành tinh.

ACSIMET, NHÀ HÌNH HỌC LỖI LẠC

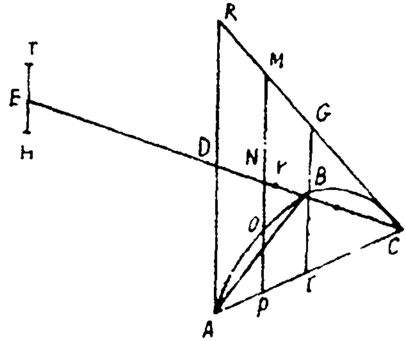
Acsimet đã có nhiều phát minh lớn về toán học. Ông đã để lại nhiều tác phẩm như : « Về hình cầu và hình trụ », « Về độ đo các cung », « Về việc cầu phương parabol », « Về các đường xoắn ốc », v.v..

Acsimet đã tính được diện tích nhiều hình, thể tích nhiều vật thể bằng một phương pháp đặc biệt, chứng tỏ rằng ông đã có khái niệm khá rõ về phép tính vi tích phân, một bộ phận quan trọng của toán học hiện đại. Về mặt này ông đã đi trước thời đại hàng 20 thế kỉ, vì mãi đến thế kỉ thứ 17 phép tính vi tích phân mới thực sự hình thành và phát triển với Lebnit và Niutơn.

1. Tính diện tích của parabol phẳn

Acsimet là người đầu tiên tìm ra phương pháp tính diện tích của parabol phẳn, chẳng hạn phần ABC giới hạn bởi parabol ABC và đường thẳng AC (H.1).

Qua trung điểm I của AC kẻ đường song song IBG với trục của parabol. Acsimet khẳng định rằng diện tích phần parabol ABC bằng $1\frac{1}{3}$ lần diện tích tam giác ABC.



Hình 1

Sau đây là phương pháp chứng minh cơ học của ông. Kẻ AR//IB cắt tiếp tuyến CG tại R. Kéo dài CB cắt AR ở D trên đó đặt DE = DC. Bây giờ coi CE là đòn bẩy có thể quay xung quanh điểm D. Ta kẻ MP qua điểm O tùy ý song song với GI.

Theo tính chất của parabol mà Acsimet cho là đã biết, tức là BI = BG, thì NP = NM, DA = DR và

$$\frac{PM}{PO} = \frac{AC}{AP} = \frac{DC}{DN} = \frac{DE}{DN} \qquad (*)$$

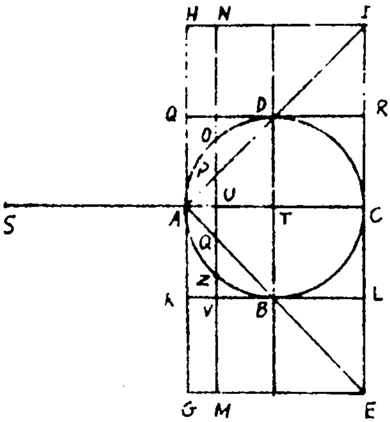
Nếu bây giờ trên đầu mút kia của đòn bẩy tại điểm E treo một đoạn TH = PO thì theo luật đòn bẩy mà Acsimet tự tìm ra đoạn TH cân bằng với đoạn MP. Dãy tỉ số (*) chứng tỏ rằng khối lượng của hai đoạn thẳng đó tỉ lệ nghịch với các cánh tay đòn. Điều này đúng với mọi đoạn thẳng kẻ trong tam giác ACR song song với IG.

Do tam giác ACR gồm tất cả đoạn (tương tự PM) mà ta có thể kẻ trong tam giác và do phần parabol ABC gồm tất cả đoạn (tương tự PO) ở trong parabol nên tam giác ACR phải cân nặng như phần parabol sao cho trọng tâm của nó là E, ngoài ra D là trọng tâm chung của chúng.

Thật thế, trọng tâm tam giác ACR là K mà $DK = \frac{1}{3}$ DC. Vì cánh tay đòn DE có treo phần parabol gấp 3 cánh tay đòn DK và do tam giác ACR cùng cân nặng như phần parabol nên tam giác phải nặng gấp ba phần parabol. Nhưng tam giác ACR gấp đôi tam giác ACD tức gấp bốn ABC. Vậy diện tích phần parabol ABC bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tam giác ABC.

2. Thể tích hình cầu

Acsimet đã chứng tỏ rằng hình trụ ngoại tiếp hình cầu lớn hơn $1\frac{1}{2}$ lần hình cầu (lớn, nhỏ ở đây là tương quan thể tích).



Hình 2

Giả sử ABCD là hình tròn lớn của hình cầu (H.2). Xét hình tròn lớn thứ hai dựng trên đường kính BD và mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng của hình tròn thứ nhất, rồi hình nón đi qua hình tròn thứ hai này có đỉnh A và trục AC, đáy là hình tròn đường kính EI và cuối cùng xét hình trụ EIHG có trục AC, đáy là hình tròn lớn EI.

Bây giờ nếu MQN là đường thẳng tùy ý song song với BD trong mặt phẳng hình tròn ABCD cắt hình tròn đó tại O và Z, cắt mặt xung quanh hình nón tại P và Q. Thế thì :

$$\left.\begin{aligned} UP^2 + UO^2 &= UA^2 + UO^2 = AO^2 = AU.AC \\ (UP^2 + UO^2) : UN^2 &= (AU.AC) : AC^2 = AU : AC \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Vậy tỉ số của tổng (nói về diện tích) các hình tròn đường kính PQ, ZO và hình tròn đường kính MN bằng tỉ số của AU và AC.

Bây giờ lại xét AC là cánh tay đòn của đòn bẩy với điểm tựa tại A và cánh tay đòn kia AS bằng AC, sau đó các hình tròn đường kính PQ, ZO, chuyển động về S. Khi đó theo (*) chúng sẽ cân bằng với đường tròn MN treo tại tâm U của nó.

Vì hình trụ EIHG bao gồm hai hình tròn đó nên hình trụ cũng cân nặng bằng hình cầu và hình nón cùng treo tại điểm S. Do T là trọng tâm hình trụ nên tỉ số của hình trụ và tổng «nón và cầu» bằng tỉ số AS và AT, tức là 2 : 1. Vậy hình nón và hình cầu cộng lại bằng nửa hình trụ. Nhưng hình nón bằng $\frac{1}{3}$ hình trụ nên hình cầu bằng $\frac{1}{6}$ hình trụ hay $\frac{2}{3}$ hình trụ nhỏ KLRQ.

Kết quả này có thể phát biểu cách khác như sau : hình cầu gấp bốn lần hình nón đáy bằng hình tròn lớn của hình cầu và đường cao bằng bán kính. Từ đó Acsimet rút ra nhận xét là diện tích mặt cầu bằng 4 lần diện tích hình tròn lớn. Nếu mỗi hình tròn bằng tam giác đáy là chu vi hình tròn và đường cao là bán kính thì tương tự mỗi hình cầu phải bằng hình nón đáy là diện tích mặt cầu và đường cao là bán kính của nó.

Acsimet đã chứng minh những kết quả trên trong cuốn «Về hình cầu và hình trụ».

3. Những nghiên cứu khác về hình học

Trong một hình lăng trụ đáy vuông có hình trụ nội tiếp mà đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông đáy lăng trụ, ta cắt lăng trụ bằng một mặt phẳng qua tâm đáy dưới và cạnh đáy trên. Ta sẽ được một khối giới hạn bởi mặt hình trụ, mặt phẳng cắt và mặt phẳng đáy. Khối này có thể tích bằng $\frac{1}{6}$ thể tích của lăng trụ.

Acsimet đã nêu lên nhận xét trên vẫn bằng phương pháp cơ học như các vấn đề ở trên rồi mới chứng minh chặt chẽ bằng hình học.

Cuối cùng ông còn nêu thêm

Nếu trong một hình lập phương có hai hình trụ nội tiếp với trục vuông góc thì thể tích của phần chung bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình lập phương.

Ngoài ra ông đã tính được:

1) Thể tích khối phỏng cầu (sphéroide)

2) Thể tích của parabôlôit phân quay

3) Trọng tâm của parabôlôit phân quay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục.

4) Trọng tâm của nửa hình cầu

5) Thể tích cầu phân

6) Thể tích phỏng cầu phân

7) Trọng tâm cầu phân

8) Trọng tâm phỏng cầu phân

9) Trọng tâm hypebôlôit phân quay.

Acsimet đã chứng minh một cách chặt chẽ định lí về diện tích parabol phân bằng hai cách: cơ học và hình học. Trong tác phẩm «Về việc cầu phương parabol», ông đã đánh giá tổng các dãy vô hạn bằng phương pháp giới hạn hoặc bằng «phương pháp epxilon». Điều đó chứng tỏ ông đã có tư duy khá rõ về toán học hiện đại. Đối với Acsimet những điều trên được coi là «trò chơi trẻ con».

NHỮNG TIÊN ĐỀ CỦA ACSIMET

Tiên đề «toàn thể lớn hơn bộ phận» của Ơclit cùng với bổ đề của Acsimet là hoàn toàn đủ để đo diện tích các hình phẳng và thể tích các khối đa diện. Nhưng muốn đo cung và mặt cong thì phải có một số tiên đề khác. Làm sao có thể biết được độ dài đường tròn lớn hơn chu vi đa giác nội tiếp và nhỏ hơn chu vi đa giác ngoại tiếp? Vì thế Acsimet đã nêu lên một số tiên đề mới.

Ông xét những đường cong phẳng giới nội nằm hoàn toàn về một phía của đường thẳng nối hai đầu mút của chúng, và những bề mặt giới hạn bởi đường cong nằm trong mặt phẳng đồng thời nằm hoàn toàn về một phía của mặt phẳng đó. Ông gọi đường cong và bề mặt cùng loại này là «lồi cùng một phía» nếu tất cả các đoạn thẳng nối 2 điểm tùy ý của đường cong hoặc của bề mặt luôn nằm về một phía của đường cong hoặc của bề mặt đó, hoặc nằm trên chúng. Sau đó ông đưa ra một số tiên đề sau đây :

1. Trong tất cả những đường nối hai điểm thì đường thẳng là ngắn nhất.

2. Nếu trong một mặt phẳng có hai đường cong lồi cùng phía mà cùng nối hai điểm, đồng thời một đường bao phủ hoàn toàn đường kia (chúng có thể trùng nhau ở một số đoạn) thì đường trước sẽ dài hơn đường sau.

3. Trong tất cả những bề mặt giới hạn bởi cùng một đường cong phẳng thì bề mặt phẳng là nhỏ nhất.

4. Giống như tiên đề 2 nhưng lại là bề mặt.

5. Nếu hiệu hai độ dài của hai đường, hai diện tích của hai mặt, hoặc hai thể tích của hai vật thể không bằng nhau, được tăng lên một số lần đủ lớn thì hiệu đó có thể lớn hơn đại lượng cho trước cùng loại.

Đó là « tiên đề Acsimet » nổi tiếng.

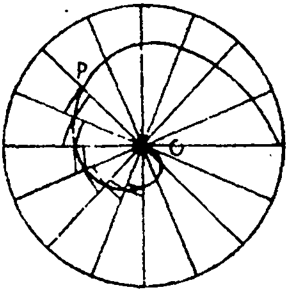
Lần đầu tiên Acsimet đã định nghĩa diện tích xung quanh của hình trụ đứng và hình nón đứng bao hàm giữa lăng trụ nội tiếp và lăng trụ ngoại tiếp theo tiên đề 4.

Trong cả hai trường hợp ông đã xây dựng hình tròn mà diện tích bằng diện tích xung quanh của hình trụ hoặc hình nón. Trong trường hợp hình trụ chẳng hạn, bán kính hình tròn này bằng số trung bình nhân giữa đường cao và đường kính hình trụ.

Bây giờ Acsimet mới chuyển qua định nghĩa nổi tiếng về diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu, diện tích cầu phân và thể tích quạt cầu.

VỀ ĐƯỜNG XOẮN ỐC

Nếu một đường thẳng chuyển động đều xung quanh một điểm O cố định và đồng thời một điểm P chuyển động đều dọc theo đường thẳng phát xuất từ O thì điểm P đó vạch nên một *đường xoắn ốc* (H.3).



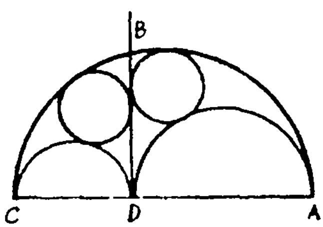
Hình 3

Acsimet đã nêu lên trong tọa độ cực tính chất đặc trưng của các điểm của đường xoắn ốc, sau đó xác định tiếp tuyến tại một điểm tùy ý của đường xoắn ốc và cuối cùng tìm diện tích phần mặt phẳng giữa hai bán kính tùy ý, giữa hai vòng xoắn liên tiếp hoặc ở trong vòng đầu tiên của đường xoắn ốc.

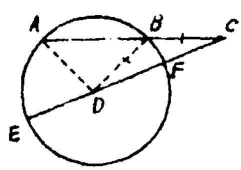
Trên hình 3 ta thấy rõ là diện tích nêu ở trên nằm giữa hai tổng của các hình viên phân (« tổng trong » và « tổng ngoài »). Điều khó khăn duy nhất trong việc chứng minh là tính tổng của dãy $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. Ở đây Acsimet đã nêu lên công thức $3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2] =$
$= n(na)^2 + (na)^2 + a(a + 2a + 3a + \ldots + na)$.

HÌNH « CON DAO NGƯỜI THỢ GIÀY »

Xét hình « con dao người thợ giày » giới hạn bởi ba nửa đường tròn từng đôi tiếp xúc nhau (H.4) tại các đầu mút. Hình này bằng hình tròn đường kính BD. Đoạn BD chia hình thành hai phần: hai hình tròn nội tiếp trong hai phần đó bằng nhau. Acsimet đã nêu ra phương pháp biểu thị đường kính của hình



Hình 4



Hình 5

tròn nội tiếp trong hình «con dao người thợ giày» theo độ dài AC nếu cho biết tỉ số mà D chia đoạn AC.

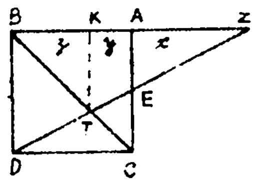
Ngoài ra Acsimet còn trình bày một mệnh đề tuyệt vời. Kéo dài dây cung AB của một đường tròn tùy ý một đoạn BC bằng bán kính và kẻ qua C đường kính FDE. Thế thì cung AE lớn gấp 3 cung BF (H.5). Cách chứng minh rất đơn giản :

$$\widehat{ADE} = \widehat{DAB} + \widehat{ACD} = \widehat{ABD} + \widehat{BDC} = 2\,\widehat{BDC} + \widehat{BDC} = 3\,\widehat{BDC}.$$

Dựa vào mệnh đề này ta có thể chia một cung AE cho trước thành 3 phần bằng nhau như sau : kẻ đường kính EF rồi đoạn BC sao cho BC bằng bán kính r (chẳng hạn dùng thước trên có hai vạch cách nhau r) và CB kéo dài đi qua A. Khi đó cung BF sẽ bằng $\frac{1}{3}$ cung AE.

DỰNG ĐA GIÁC ĐỀU 7 CẠNH

Acsimet đã nêu mệnh đề sau : Giả sử ta kẻ đường chéo BC của hình vuông ABDC (H.6) rồi từ D kẻ đường hoành DTEZ sao cho hai tam giác DTC và ZAE tương đương. Từ T hạ TK vuông góc với AB. Gọi các đoạn thẳng ZA, AK, KB theo thứ tự là x, y, z. Ta sẽ được những định lí sau đây về diện tích:



Hình 6

AB.KB = AZ² hay $(y + z)\,z = x^2$ (1)

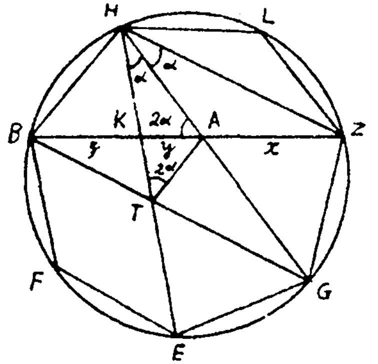
ZK.AK = KB² hay $(x + y)\,y = z^2$ (2)

Dễ dàng chứng minh các mệnh đề này bằng cách xét những tam giác tương đương. Acsimet không nói gì về cách dựng đường hoành và các đoạn x, y. Nhưng điều này không khó nếu ta sử dụng thiết diện cônic. Thật thế, nếu đặt $y + z = a$ thì các phương trình (1) và (2) có thể viết :

$$a\,(a - y) = x^2 \qquad (3)$$

$$(x + y)\,y = (a - y)^2 \qquad (1)$$

Trong hệ tọa độ vuông góc thì phương trình (3) biểu thị một parabol, còn phương trình (4) biểu thị một hypebol. Hai đường cong này cắt nhau tại ba điểm mà một điểm nằm trong góc vuông thứ nhất.



Hình 7

Đến đây Acsimet mới dựng tam giác AKH có cạnh đáy là AK = y và hai cạnh bên là AH = x và HK = z (H. 7). Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BHZ, Acsimet đã khẳng định rằng đoạn BH chính là cạnh của hình bảy cạnh nội tiếp trong đường tròn đó.

Thật vậy, giả sử BHLZGEF là hình bảy cạnh đã dựng được và đường chéo BZ cắt HE và HG tại K và A, còn BG cắt HE tại T. Lại gọi các đoạn ZA, AK và KB của đường chéo ZB là x, y và z. Thế thì ta cũng được AH = x, HK = z. Gọi α là góc nội tiếp chắn cung mà dây là cạnh hình bảy cạnh. Từ ba tam giác đồng dạng ZHK, HAK và HTA (chúng có một góc bằng α và một góc bằng 2α) suy ra các tỉ lệ thức :

$$\frac{z}{x+y} = \frac{y}{z}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{x}{y+z},$$

tương đương với (2) và (1).

ACSIMET, NHÀ CƠ HỌC VĨ ĐẠI

Trong tác phẩm «Về sự cân bằng của các hình phẳng» Acsimet lần đầu tiên đã trình bày một cách lôgic và chặt chẽ định luật nổi tiếng về đòn bẩy xuất phát từ một dãy tiên đề :

« Hai đại lượng cân bằng nhau nếu các khoảng cách của chúng (đến điểm tựa của đòn bẩy) tỉ lệ nghịch với trọng lượng».

Sử dụng định luật này có thể xác định trọng tâm của hình bình hành, hình tam giác và hình thang, trọng tâm của parabol phân, của phần diện tích parabol bao hàm giữa hai đường thẳng song song.

Trong tác phẩm «Về các vật nổi», Acsimet bắt đầu đưa ra định luật về áp lực của chất lỏng trên vật bị chìm trong nó mà tỉ trọng nhỏ hơn, bằng hoặc lớn hơn tỉ trọng của chất lỏng.

Như vậy Acsimet còn là một nhà cơ học vĩ đại. Rất nhiều sáng chế và phát minh cơ học của ông đã nổi tiếng trên thế giới như : cái vít Acsimet, hệ thống đòn bẩy, ròng rọc và đinh vít để nâng và chuyển các vật có khối lượng lớn, xác định thành phần hợp kim bằng cách nhúng vật trong nước, v.v. Ông đã giải quyết được nhiều vấn đề khó nhất của thời đó về khoa học và kĩ thuật.

CÁC KHỐI ĐA DIỆN NỬA ĐỀU

Acsimet còn nghiên cứu các khối đa diện nửa đều giới hạn bởi :

4 tam giác đều và 4 lục giác đều,
hoặc 8 tam giác và 6 hình vuông,
hoặc 6 hình vuông và 8 lục giác,
hoặc 8 tam giác và 6 bát giác,
hoặc 8 tam giác và 18 hình vuông,
hoặc 12 hình vuông, 8 lục giác và 6 bát giác,
hoặc 20 tam giác và 12 ngũ giác,
hoặc 12 ngũ giác và 20 lục giác,
hoặc 20 tam giác và 12 thập giác,
hoặc 32 tam giác và 6 hình vuông,
hoặc 20 tam giác, 30 hình vuông và 12 ngũ giác,
hoặc 30 hình vuông, 20 lục giác và 12 thập giác.

ACSIMET NHÀ YÊU NƯỚC NỒNG NÀN

Acsimet là người yêu nước thiết tha. Ông đã tham gia bảo vệ quê hương chống bọn xâm lược La mã, đã lãnh đạo việc xây dựng các công trình kĩ thuật phức tạp và sáng chế vũ khí phục vụ kháng chiến. Nhà văn cổ Hi Lạp Plutarơ đã tả lại việc quân đội La mã bị đánh trả ở thành phố Xiracudơ như sau :

« Khi quân La mã bắt đầu những cuộc tiến công từ trên đất liền cũng như trên biển, nhiều người dân Xiracudơ cho rằng khó có thể chống lại một đội quân hùng mạnh như vậy. Acsimet liền cho mở các máy móc và vũ khí đủ các loại do ông sáng tạo ra. Thế là những tảng đá lớn bay đi với vận tốc phi thường, phát ra những tiếng động khủng khiếp, tới tấp giáng xuống đầu các đội quân đi bằng đường bộ. Cùng lúc đó có những thanh xà nặng uốn cong giống hình chiếc sừng được phóng từ pháo đài, liên tiếp rơi xuống tàu địch.

Tướng La mã phải ra lệnh rút lui. Nhưng bọn xâm lược cũng không thoát khỏi tai họa. Khi các đoàn tàu địch chạy gần đến khoảng cách một mũi tên bay thì Acsimet ra lệnh mang đến tấm gương sáu mặt. Cách tấm gương này một khoảng ông đặt các tấm gương khác nhỏ hơn, quay trên các bản lề. Ông đặt tấm gương giữa các tia sáng của Mặt trời mùa hè. Các tia sáng từ gương chiếu ra đã gây nên một đám cháy khủng khiếp trên các con tàu. Đoàn tàu biến thành đám tro... »

Câu chuyện này tưởng là hoang đường. Nhưng đến năm 1777 nhà toán học nổi tiếng Bu-phông mới chứng minh được rằng điều đó có thể xảy ra. Bằng 168 chiếc gương, trong những ngày nắng tháng tư, ông đã đốt cháy một cây to và làm nóng chảy chì ở cách xa 45 mét.

ACSIMET, MỘT CÔNG TRÌNH SỰ SÁNG TẠO.

Nhà văn cổ Hi Lạp Aphinô đã tả quang cảnh công trường đóng tàu thủy của Acsimet như sau :

« Nhà hình học Acsimet được giao đóng một chiếc tàu to bằng 64 chiếc tàu thường. Tất cả mọi thứ cần thiết, các loại gỗ quý được chở từ khắp nơi đến. Nhiều thợ đóng tàu cũng được triệu về đây. Mọi việc được tiến hành rất nhanh chóng, có quy củ, nên chỉ sau nửa năm đã làm xong một nửa tàu. Riêng việc hạ thủy tàu này, mọi người bàn cãi rất nhiều: làm sao có thể đưa được một con tàu lớn như vậy xuống nước?

Nhưng Acsimet đã dùng trục quay để kéo con tàu với rất ít người giúp việc. Chiếc tàu khổng lồ này có đầy đủ tiện nghi, như nhà bếp, nhà ăn, chỗ dạo chơi, kho lương thực, thư viện, ... ».

CÁI CHẾT CỦA ACSIMET

Acsimet vẫn tham gia bảo vệ thành phố quê hương. Quân xâm lược tàn bạo cố đánh phá, nhưng không thể tiến lên được. Chúng bèn dùng cách vây thành để ngăn chặn mọi đường tiếp tế.

Mùa thu năm 212, trước công nguyên, thành Xiracudơ bị hạ sau hai năm bị vây hãm. Quân La mã xông vào tàn sát nhân dân rất dã man. Trong lúc Acsimet đang ngồi trên bãi cát mải mê tính và vẽ hình thì một tên lính La mã đã cầm giáo đâm chết ông.

APÔLÔNIUT

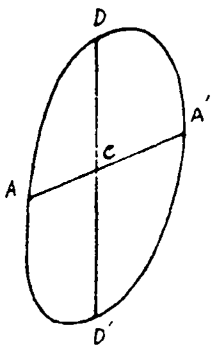
Apôlôniut là một nhà hình học nổi tiếng cổ Hi Lạp mà chúng ta đã từng quen biết khi học về *đường tròn Apôlôniut*, quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách tới hai điểm cố định cho trước bằng một hằng số.

Ông sinh khoảng năm 210 trước công nguyên. Thuở nhỏ ông sang Alêcxăngđri và học toán với các học trò của Ơclit. Ông đã lập nên *lí thuyết về chuyển động của Mặt trăng* và để lại cho các nhà thiên văn những bảng tính toán giúp tính được vị trí của Mặt trời và Mặt trăng trong thời gian nhật thực và nguyệt thực.

TÁC PHẨM «CÔNIC» NỔI TIẾNG

Ông đã viết tác phẩm «*Cônic*», tức là «Thiết diện cônic» sau này được dịch ra tiếng Anh và tiếng Pháp dưới đầu đề «Các đường cônic của Apôlôniut».

Chính ông đã tìm ra đầu tiên phương trình $y^2 = px$ đối với parabol, mà bây giờ ta gọi là phương trình chính tắc của parabol trong đó p gọi là tham số tiêu.



Hình 8

Ông cũng đã đưa vào đường cônic một số danh từ mới. Ông gọi đường trung bình AA' (H.8) là *tâm* của thiết diện cônic, đường thẳng đi qua tâm C theo phương tung độ được gọi là *đường kính liên hợp* của AA'.

Trong elip đường kính liên hợp cắt elip tại hai điểm D và D'. Ông đã chứng minh hai đường kính liên hợp có thể thay thế cho nhau.

Ông cũng đã đưa ra khái niệm *hypebol liên hợp*. Từ đó ông đã phát biểu một cách đơn giản tất cả định lí về đường kính liên hợp đối với hypebol cũng như đối với elip.

Ngoài tác phẩm «Cônic», Apôlôniut còn một số tác phẩm khác sau đây :

1. Về thiết diện theo tỉ số cho trước

Ông đã xét bài toán: «Cho hai đường thẳng trên mỗi đường cho một điểm; qua một điểm thứ ba bất kì ta phải kẻ một đường thẳng sao cho nó định ra trên hai đường thẳng đã cho (tính từ những điểm đã cho) hai đoạn theo một tỉ số cho trước». Ông phân tích bài toán để dẫn tới phương trình bậc hai, sau đó tổng hợp bằng cách giải phương trình bậc hai và chứng minh bài toán có nghiệm là số thực.

2. Về thiết diện có diện tích cho trước.

3. Về xác định thiết diện.

Cho bốn điểm A, B, C, D trên một đường thẳng, hãy xác định trên đường thẳng đó một điểm P sao cho hình chữ nhật AP . CP có tỉ số cho trước với BP . DP.

4. Về các tiếp điểm.

Ông nêu ra bài toán nổi tiếng về tiếp tuyến sau đây: «Cho ba vật thể, mỗi vật thể có thể là điểm, đường thẳng hoặc đường tròn. Hãy tìm đường tròn đi qua mỗi điểm đã cho và tiếp xúc với đường thẳng hoặc đường tròn đã cho».

5. Về quỹ tích phẳng.

6. So sánh khối mười hai mặt và khối hai mươi mặt.

Nếu khối 12 mặt và khối 20 mặt cùng nội tiếp trong một hình cầu thì tỉ số diện tích bề mặt của chúng bằng tỉ số thể tích của chúng.

7. Về đường xoắn ốc.

BECNULI

(DÒNG HỌ BERNOULLI)

Becnuli

Học về bất đẳng thức chúng ta đều biết *bất đẳng thức Becnuli*:

$(1 + x)^m \geqslant 1 + mx$ nếu m nằm ngoài khoảng từ 0 đến 1 và $(1+x)^m \leqslant$ $\leqslant 1 + mx$ nếu $0 \leqslant m \leqslant 1$ (m là số hữu tỉ và $x > -1$).

Chúng ta hãy làm quen với dòng họ Becnuli ở Thụy Sĩ. Điểm lại lịch sử văn hóa khoa học thế giới, một trong những gia đình có nhiều thế hệ liên tiếp các nhà khoa học, văn nghệ sĩ nổi tiếng là gia đình Becnuli. *Gia đình này đã có 9 nhà toán học trong đó 5 là viện sĩ mà nổi tiếng nhất là Iacôp và Iôgan Becnuli.*

Đặc biệt trong suốt 250 năm ở trường Đại học Bazen Thụy Sĩ lúc nào cũng có giáo sư thuộc dòng họ Becnuli, và dòng họ này đã lãnh đạo bộ môn toán ở trường Đại học đó trong hơn 100 năm, từ năm 1687 với Iacôp Becnuli cho đến năm 1790 với Iôgan II là con trai của Iôgan Becnuli.

Bây giờ chúng ta hãy nói về hai anh em *Iacôp và Iôgan*, những người đã cùng Niutơn và Lebnit mở đầu một thời kì mới của toán học, với sự xuất hiện của phép tính vi tích phân và sự ra đời của giải tích toán học.

Iacôp Becnuli sinh ngày 27 tháng 12 năm 1654 và mất ngày 16 tháng 8 năm 1705. Từ nhỏ ông đã thông thạo nhiều ngoại ngữ như các tiếng Đức, Anh, Pháp, Italia, La tinh và Hi Lạp. Ông ham thích học toán, nhưng phải tự học toán một cách vụng trộm vì bố ông không muốn ông học toán. Năm 17 tuổi, ông đỗ tiến sĩ triết học và đã có một công trình đầu tiên về toán.

Năm 1676 ông đi du lịch nhiều nơi trên thế giới, thăm Thụy Điển, Italia, Pháp và sống ở Giơnevơ 20 tháng. Năm 1680 ông trở về Bazen và trong hai năm liền 1681 và 1682 ông công bố hai công trình về thiên văn. Năm 1687 ông được cử làm giáo sư toán học của trường Đại học Bazen.

Iôgan Becnuli em của Iacôp, sinh năm 1667. Sau khi học xong trung học, bố ông cho đi học buôn bán và học thêm tiếng Pháp ở thành phố Nepxaten. Một năm sau, Iôgan bỏ về nhà vì không thích nghề buôn bán và vào học đại học. Năm 18 tuổi ông bảo vệ luận án tiến sĩ văn khoa. Theo lời khuyên của anh, Iôgan bắt đầu quan tâm đến toán học. Chỉ sau hai năm Iôgan đã đọc hầu hết các tác phẩm của các nhà toán học cổ và đương thời.

Năm 1687 hai anh em Iacôp và Iôgan nghiên cứu bài báo mới nhất của Lebnit về « giải tích các vô cùng bé ». Lúc đầu cả hai không hiểu hết bài báo đó nên đã viết thư cho Lebnit ở Hanôvrơ đề nghị giải thích một số điểm trong bài báo đó. Nhưng lúc đó Lebnit đang đi ra nước ngoài, thành thử 4 năm sau (năm 1690) Lebnit mới nhận được thư của hai anh em Becnuli. Trong thời gian chờ đợi, hai anh em đã không cần đến sự giúp đỡ của Lebnit. Họ đã tự tìm hiểu để nắm vững bài báo và đã phát triển nhiều ý của Lebnit. Hai anh em đã sử dụng phép tính mới này để giải một số bài toán có kết quả rất tốt.

Từ năm 1693 Lebnit và Iôgan bắt đầu trao đổi thư từ với nhau cho tới khi Lebnit mất. Năm 1745 những bức thư đó được xuất bản thành 2 tập. Trong số lượng khổng lồ 15 nghìn bức thư mà Lebnit trao đổi với các nhà khoa học thì số thư trao đổi với Iôgan Becnuli chiếm một phần đáng kể và có ý nghĩa lớn đối với lịch sử toán học.

Những công trình toán học của hai anh em Becnuli đã sớm đưa họ lên vị trí những nhà toán học hàng đầu của châu Âu thời bấy giờ. Vì vậy năm 1699 khi Viện Hàn lâm khoa học Pari lần đầu tiên chọn viện sĩ nước ngoài thì trong danh sách các viện sĩ này có tên hai anh em Becnuli. Và *dòng họ Becnuli đã có mặt ở Viện Hàn lâm Pari suốt 91 năm* với Iacôp, Iôgan và hai con của Iôgan là Danin I và Iôgan II.

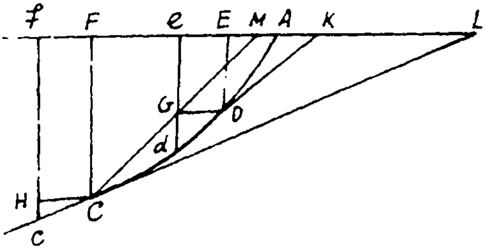
Từ năm 1687 Iacôp là chủ nhiệm khoa toán trường Đại học Bazen và đến năm 1705 khi Iacôp mất thì Iôgan lúc đó ở Hà Lan được mời về thay thế anh trong chức vụ đó.

Khi Lebnit nêu lên ý kiến mới về giải tích các vô cùng bé thì nhiều nhà toán học đương thời hoài nghi, thậm chí có người phản đối, chống lại. Nhưng anh em Becnuli đã ủng hộ và lao vào khai thác những ý hay của Lebnit, vận dụng tài tình phương pháp mới này để giải quyết nhiều vấn đề, nhiều bài toán của toán học và của các ngành khác, do đó đã chứng minh tính ưu việt của phương pháp mới.

Iacôp đã giải bài toán « Tìm đường cong tạo bởi một dây đồng chất được cố định ở hai đầu » bằng phương pháp của giải tích toán học.

Năm 1686 Lebnit nêu lên bài toán sau : « Tìm đường cong vạch nên bởi một vật nặng di chuyển từ một điểm cao đến một điểm thấp (không cùng trên một đường thẳng đứng) sao cho thời gian di chuyển là ngắn nhất ».

Đó là đường cong ADC (H. 9). Trong thời gian ngắn Δt vật nặng đã từ vị trí D tới d, từ vị trí C tới c. Các cung Dd và Cc có tính chất là các hình chiếu của chúng trên hai đường thẳng đứng Gd và Hc thì bằng nhau theo điều kiện bài toán.



Hình 9

Iôgan đã chuyển bài toán cơ học này thành bài toán thuần tuý hình học rồi tìm đường cong có tính chất hình học đã cho.

I. Phần đầu bài toán — Chuyển bài toán cơ thành bài toán hình. Giả sử tiếp tuyến kẻ từ D cắt trục AF là DK, kẻ từ

C là CL. Iôgan viết hằng đẳng thức phụ $\frac{Dd}{Cc} = \frac{Dd}{Hc} \cdot \frac{Hc}{Cc}$

Xét các tam giác đồng dạng ta có:

$\frac{Dd}{dG} = \frac{DK}{DE}$ và $\frac{Cc}{Hc} = \frac{CL}{FC}$. Suy ra $\frac{Dd}{Cc} = \frac{Gd}{Hc} \cdot \frac{DK}{DE} \cdot \frac{FC}{CL}$

Nhưng theo giả thiết thì $\frac{Gd}{Hc} = 1$, vì thế $\frac{Dd}{Cc} = \frac{DK}{DE} \cdot \frac{FC}{CL}$

Qua C kẻ CM//DK. Ta có:

$\frac{DK}{DE} = \frac{CM}{CF}$ vậy $\frac{Dd}{Cc} = \frac{CM}{CL}$

Vì Δt bằng nhau nên $\frac{Dd}{Cc}$ bằng tỉ số vận tốc, và tỉ số bình phương vận tốc bằng tỉ số độ cao (theo một định luật có trước định luật Galilê)

$$\frac{Dd^2}{Cc^2} = \frac{CM^2}{CL^2} = \frac{ED}{FC}$$

Hệ thức này biểu thị tính chất hình học thuần túy của đường cong. Đường cong phải tìm có tính chất là: nếu tại các điểm tùy ý C và D ta kẻ các tiếp tuyến CL và DK rồi kẻ đoạn CM song song với tiếp tuyến DK thì phải có đẳng thức $\frac{CL^2}{CM^2} = \frac{CF}{DE}$

+ Phần hai của bài toán — (Giải bài toán hình học)

Iôgan đã tài tình đưa bài toán về việc nghiên cứu loại những bài toán ngược trên các tiếp tuyến. Ông đã giải như sau:

Giả sử AE = x (gốc tọa độ phải là điểm A), ED = y, thế thì GD = dx và Gd = dy. Có thể coi điểm A cố định và những dữ kiện của nó là không đổi.

Gọi CF = a, CL = b. Theo hình vẽ $Dd = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Xét hai tam giác đồng dạng GDd, FCM ta suy ra:

$\frac{GD}{Dd} = \frac{FC}{CM}$, tức là $\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{a}{CM}$

Từ đó $CM^2 = \frac{a^2dx^2 + a^2dy^2}{dy^2}$

Sự đòi hỏi đối với đường cong là :

$$\frac{b^2}{CM^2} = \frac{a}{y}, \text{ hay } b^2ydy^2 - a^2dy^2 = a^2dx^2.$$

Vậy bài toán dẫn tới một phương trình vi phân.

Iacôp đã nêu lên một bài toán nổi tiếng, đó là «bài toán đẳng chu» quen thuộc với chúng ta ngày nay : Qua hai điểm A và B hãy vạch một đường khép kín, sao cho với chiều dài cho trước đường ấy bao một diện tích lớn nhất». Rõ ràng công cụ của giải tích vô cùng bé đã tỏ ra rất có hiệu lực để giải các bài toán này.

Hai anh em Becnuli đã có nhiều đóng góp quan trọng vào nhiều ngành khoa học khác nhau, ngoài giải tích toán học. Iacôp đã có cống hiến lớn vào *lí thuyết xác suất* với *«sơ đồ Becnuli», «định lí Becnuli»* nổi tiếng. Iôgan đã đóng góp xuất sắc vào toán học, cơ học, vật lí, động lực học chất lỏng. Trước khi mất vào tuổi 80 Iôgan vẫn giữ thói quen làm việc suốt ngày đến tận nửa đêm. Ông đã để lại một người học trò mà ông rất yêu quý, đó là nhà toán học vĩ đại Ơle.

BƠDU

(ETIENNE BEZOUT)

Học về đa thức, chúng ta đã từng làm quen với định lí sau đây mang tên nhà toán học Bơdu :

«Số dư của phép chia đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

cho nhị thức $(x - a)$ bằng giá trị của đa thức $P(x)$ khi $x = a$».
Nhà toán học Pháp Bơdu sinh ngày 31-3-1730 và mất ngày

27-9-1783. Từ năm 1763 ông bắt đầu dạy toán trong quân đội Pháp ở các trường hải quân và pháo binh. Công trình chủ yếu của ông là đại số cao cấp. Ông đã nêu ra lí thuyết về định thức trong việc giải hệ phương trình bậc nhất, phát triển việc khử ẩn khi giải hệ phương trình bậc cao, chứng minh định lí về hai đường cong bậc m và n cắt nhau không quá m.n điểm.

Tác phẩm «Giáo trình toán» của Bơdu (từ 1764 đến 1769) gồm 6 tập được phổ biến ở Pháp và ở nước ngoài cho tới năm 1818. Tên ông được đặt cho một trong những định lí cơ bản của đại số.

Trong lĩnh vực đại số sơ cấp, Bơdu đã phát triển phương pháp thừa số vô định để giải hệ phương trình.

Ông đã là viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa Học Pari năm 1758 khi mới 28 tuổi.

Bunhiacôpxki

BUNHIACÔPXKI

Nói đến các bất đẳng thức quan trọng trong đại số, ta thường nhắc tới và vận dụng *bất đẳng thức Bunhiacôpxki* sau đây:

« Với mọi a_i, b_i ta có bất đẳng thức

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2,\ \ldots,\ a_n = kb_n\text{ »}$$

Nhà toán học Nga Bunhiacôpxki sinh ngày 16-12-1804 là viện sĩ Viện Hàn lâm Pêtecbua từ khi mới 21 tuổi và sau này trở thành phó chủ tịch của Viện từ năm 1864 cho tới năm 1889 là năm ông mất. Ông mất ngày 12-12-1889.

Từ năm 16 tuổi đến 21 tuổi ông đã theo học ở Pari, lúc đó có nhiều giáo sư nổi tiếng dạy như Laplaxơ, Phuriê, Côsi, Lơgiăngđrơ. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ toán tại Pari vào năm 1825 lúc ông mới 21 tuổi.

Trở về nước ở Pêtecbua ông đã hoạt động tích cực trong lĩnh vực giáo dục, giảng dạy toán cho đến năm 1846. Trong 15 năm sau, từ 1846 đến 1859 ông dạy tại trường Đại học Pêtecbua, phụ trách các môn cơ học giải tích, lí thuyết xác suất và giải tích toán học. Bắt đầu từ năm 1858, ông trở thành chuyên gia quan trọng của chính phủ về các vấn đề thống kê và bảo hiểm.

Có thể nói rằng lĩnh vực hoạt động của ông rất rộng lớn và đầy kết quả tốt đẹp. Ông đã có đến 168 công trình nghiên cứu. Công trình ưu việt của Bunhiacôpxki là lí thuyết số, lí thuyết xác suất và ứng dụng. Ông còn nghiên cứu nhiều về giải tích, hình học và đại số, quan tâm cả đến tính toán trong thực tiễn ; góp phần vào việc cải tiến cách tính toán của nước Nga.

Tác phẩm lớn của ông là *«Cơ sở của lí thuyết xác suất»* (1846) trong đó có nhiều phần độc đáo, nhất là phần lịch sử phát sinh và phát triển môn xác suất, phần ứng dụng quan trọng của xác suất trong vấn đề bảo hiểm và dân số, v.v.

Một loạt công trình của ông về thống kê, xác suất đã góp phần đáng kể vào sự phát triển của lí thuyết thống kê ở nước Nga. Các công trình về lí thuyết số với một số khái niệm mới đã mang lại sự hấp dẫn đối với môn này vào thế kỉ thứ 19. Trong hình học ông cũng đã nghiên cứu về lí thuyết các đường song song.

Cùng với Ôxtrôgratxki và Trêbưsep, ông đã có vai trò lớn trong việc nâng cao trình độ khoa học của việc giảng dạy toán ở đại học và mở rộng phạm vi chương trình toán ở đại học. Ông đã viết tập «Những bài giảng về toán lí thuyết và toán ứng dụng» có giá trị lớn đối với việc giảng dạy toán cũng như đối với từ vựng khoa học. Ngoài ra đối với nhà trường phổ thông Bunhiacôpxki đã viết cuốn sách giáo khoa «Số học» (1844) và cuốn «Chương trình và tóm tắt môn số học».

Ông là hội viên danh dự của tất cả các trường đại học Nga, của nhiều hội khoa học, đồng thời là phó chủ tịch Viện Hàn lâm khoa học và Viện đã đặt ra giải thưởng mang tên ông cho những tác phẩm toán học có giá trị lớn.

Côsi

CÔSI

(AUGUSTE LOUIS CAUCHY)

Trong sách giáo khoa toán học phổ thông tên tuổi của Côsi được nhắc đến thường xuyên với *bất đẳng thức Côsi.*

« Giữa số trung bình cộng và số trung bình nhân có bất đẳng thức sau :

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \quad (x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

Dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ »

CUỘC ĐỜI ÉO LE CỦA CÔSI

Côsi sinh ở Pari ngày 21 tháng 8 năm 1789. Nhà toán học đầy óc sáng tạo này có rất nhiều công trình toán học, chỉ thua Ơle mà thôi. Những nhà toán học hiện đại tiếp thu được ở Côsi hai điều « canh tân » nổi bật trên con đường nghiên cứu toán ở thế kỉ thứ 18. Điều canh tân đầu tiên là đưa sự chặt chẽ vào giải tích toán học, mà trước đó các nhà toán học quá dễ dãi.

Điều canh tân thứ hai đó là đi vào một hướng trái ngược: giải tích tổ hợp. Từ phương pháp của Lagrăng trong lí thuyết phương trình, Côsi đã rút ra được cái tinh túy để hệ thống thành những cơ sở đầu tiên của lí thuyết nhóm. Ông đã nhìn thấy trong tính đối xứng của các công thức đại số những phép toán và các tính chất của chúng dẫn tới lí thuyết nhóm. Ngày nay lí thuyết sơ cấp đó tuy khá phức tạp đã có vai trò rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học, từ lí thuyết về phương trình đại số cho tới hình học và lí thuyết cấu trúc nguyên tử.

Cuộc đời và tính tình của Côsi giống như của chàng «Đông Ki-sôt» đáng thương, không biết nên khóc hay nên cười. Ông là anh cả của 6 em trong một gia đình Thiên chúa giáo. Thời niên thiếu của ông trải qua cuộc cách mạng ở Pháp. Bố Côsi phải đem cả gia đình về quê, phải thường xuyên sống bằng hoa quả và rau tự trồng. Do đó mà Côsi ốm yếu luôn vì suy dinh dưỡng.

Thời gian sống ẩn dật này khoảng 11 năm. Bố Côsi phải đảm nhận việc dạy con cái học. Ông thường soạn thơ để con cái học lịch sử, luân lí, ngữ pháp v.v. Do đó Côsi đã hưởng được ở bố khả năng làm thơ bằng tiếng Pháp và tiếng la tinh, lời thơ đầy tình cảm nồng hậu. Gia đình Côsi sống cạnh gia đình nhà hóa học Pháp Bectôlê, cách nhau chỉ một bức tường giữa hai khu vườn.

Ngày 1 tháng 1 năm 1800, bố Côsi do có liên hệ bí mật với Pari nên được phong làm thư kí Nghị viện, có phòng làm việc ở lâu đài Lucxămbua. Ông đã dành cho con một góc phòng để Côsi có điều kiện nghiên cứu và học tập.

Nhà toán học Lagrăng lúc đó là giáo sư trường Đại học Bách khoa thường xuyên đến liên hệ công việc với bố Côsi và đã có dịp tiếp xúc với Côsi. Ông ta rất ngạc nhiên về năng khiếu toán học đặc biệt của Côsi. Một hôm trước mặt Laplaxơ và một số nhân vật khác, Lagrăng đã chỉ vào cậu bé Côsi ngồi làm việc ở một góc phòng của bố và nói : «Các bạn có thấy cậu thiếu niên này không ? Cậu ta sẽ vượt chúng ta khi chúng ta đang còn là những nhà toán học».

Lagrăng đã khuyên bố Côsi như sau : «Bác đừng để Côsi sờ đến một cuốn sách toán cao cấp nào trước khi em ấy 17 tuổi», hoặc «Bác nên dạy văn cho Côsi để có cơ sở vững chắc, vì em ấy sẽ trở thành nhà toán học lớn và phải biết viết thành văn những thành tựu toán học của mình ».

Năm 13 tuổi Côsi vào học trường trung tâm của Păngtêông. Ở đó vua Napôlêông đã đặt ra nhiều giải thưởng và một kì thi học sinh giỏi cho tất cả các trường của nước Pháp thuộc cùng một lớp. Côsi đứng đầu lớp và đã đạt nhiều giải nhất về các môn học tiếng la tinh, Hi Lạp và thơ la tinh.

Năm 1805 khi 16 tuổi, Côsi đã gặp được một thầy dạy toán giỏi và đã thi đỗ thứ hai vào trường Đại học Bách khoa. Năm 1807 ông vào học trường Đại học Cầu Cống và tuy mới 18 tuổi nhưng ông đã vượt các bạn học 20 tuổi mặc dầu các bạn này đã học 2 năm ở trường này rồi.

VÀO QUÂN ĐỘI VẪN TIẾP TỤC PHÁT MINH TOÁN HỌC

Khi Côsi rời Pari tới Secbua để nhận việc lần đầu, ông đã ra đi « nhẹ về hành lí và đầy hi vọng » để làm một kĩ sư quân đội. Hành lí nhẹ vì ông chỉ mang theo có 1 cuốn sách : « Cơ học thiên thể » của Laplaxơ, « Về các hàm số giải tích » của Lagrăng, một cuốn sách về Chúa Giêsu và một cuốn của Viếcgil.

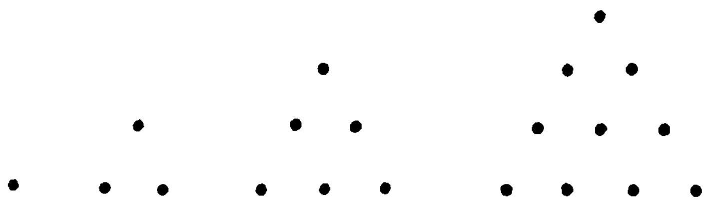
Côsi sống ở Secbua khoảng ba năm. Ngoài công việc bận rộn của người kĩ sư trong quân đội, ông đã tranh thủ thời gian để nghiên cứu bằng cách « xem lại toàn bộ các ngành toán học, bắt đầu bằng số học và kết thúc bằng thiên văn nhằm làm sáng tỏ những chỗ còn chưa rõ hoặc đơn giản hóa các chứng minh để tìm thêm những mệnh đề mới ».

Sau thất bại của Napôlêông ở Matxcơva năm 1812 và ở Laidic năm 1813, Côsi trở về Pari cuối năm 1813. Lúc đó ông 24 tuổi. Công trình toán học của ông bấy giờ là lí thuyết khối đa diện và hàm số đối xứng dã làm cho các nhà toán học lớn của nước Pháp chú ý.

Vào những năm 1840, Côsi đã đưa ra « *lí thuyết về các phép thế* », sau này ông phát triển thành « *lí thuyết các nhóm hữu hạn* ».

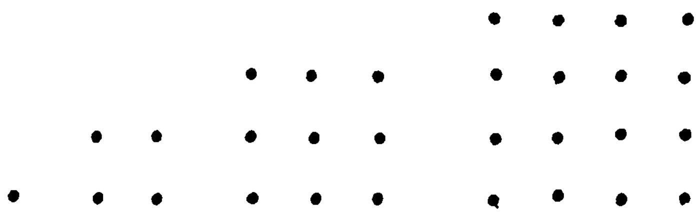
Bước vào tuổi 27, năm 1816, Côsi đã đứng ở hàng đầu của các nhà toán học còn sống khi đó. Năm 1814 Côsi đã viết công trình về tích phân xác định và không ai vượt được ông về *lí thuyết hàm số một biến phức* mà Gauxơ đã đưa ra định lí cơ bản năm 1811 trước Côsi 3 năm. Công trình Côsi chi tiết hơn nhiều, chỉ được công bố năm 1827. Sự chậm trễ này là do khối lượng nội dung của công trình (dày khoảng 180 trang).

Năm sau (1815) Côsi lại gây một chấn động trong giới toán học bằng cách chứng minh một trong những định lí lớn của Fecma để lại : mọi số nguyên dương là tổng của ba « tam giác », của bốn « hình vuông », của năm « ngũ giác », của sáu « lục giác », v.v. Số 0 trong mỗi trường hợp được coi là một số trong đó. Một « tam giác » là một trong những số 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21,... có được bằng cách dựng những tam giác đều bằng các điểm (H.10).



Hình 10

Những « hình vuông » 0, 4, 9, 16,... cũng được xây dựng như thế (H.11).



Hình 11

Không phải dễ gì mà chứng minh được ! Ơle, Lagrăng, Lơgiăngđrơ đã không làm được ; còn Gauxơ mới chứng minh được đối với các « tam giác ».

Trong 19 năm cuối đời mình Côsi đã có trên 500 công trình trên tất cả lĩnh vực của toán học, kể cả cơ học, vật lí, thiên văn.

Côsi đã chết đột ngột ngày 23 tháng 5 năm 1857 lúc 68 tuổi. Một vài giờ trước khi mất, Côsi đã nói với tổng giám mục Pari: *« Những con người sẽ mất, nhưng những công trình của họ vẫn ở lại ».*

ĐÊCAC

(RENÉ DESCARTES)

Nói đến Đêcac là nói đến *hệ tọa độ vuông góc* mà mọi học sinh phổ thông đều biết. Đêcac sinh trưởng trong một gia đình quý phái. Mẹ mất sớm. Từ nhỏ Đêcac là cậu bé kém sức khỏe, nhưng có cái đặc biệt là luôn luôn muốn biết mọi điều ở trên Trái đất và trên bầu trời mà người vú nuôi kể cho nghe. Năm lên tám, bố ông cho đi học. Ông được cha Saclê hiệu trưởng trường dòng chú ý từ đầu, quan tâm chăm sóc và dạy dỗ đặc biệt. Đêcac được phép dậy muộn và đến lớp chậm. Sau này khi trưởng thành, nhớ lại những năm tháng sống ở trường dòng, Đêcac nhận ra rằng chính nhờ những buổi sáng sớm được dậy muộn mà ông đã lặng lẽ suy nghĩ mọi việc, giúp ông phát triển được triết học và toán học.

Tháng 8 năm 1612 lúc 17 tuổi ông từ giã nhà trường và đã trở thành người bạn thân của cha Saclê. Người bạn thân thứ hai của ông ở đó là Mecxen, nổi tiếng về khoa học và toán học, đã trở thành người đại diện khoa học và người bảo vệ che chở Đêcac trong mọi lúc.

Thiên tài của Đêcac bộc lộ khá sớm. Lúc 14 tuổi, ngồi suy nghĩ trên giường, ông cứ luôn luôn tự hỏi: làm sao biết được một cái gì đó? tại sao chúng ta lại không khám phá những điều mà chúng ta có thể biết được? Ông đã từng nói: « Tôi đang tồn tại » và « Tôi tư duy, tức là tôi tồn tại ». Năm

18 tuổi, ông đã quyết định phải đi đây đó để xem cuộc sống xung quanh ra sao chứ không nên căn cứ vào sách vở. Ông đã rời nhà đến sống ở Pari. Ở đây ông đã miệt mài nghiên cứu triết học và toán học. Những người bạn cũ thuộc loại ăn chơi rủ rê ông trước đây lại đến tìm ông để buộc ông cờ bạc rượu chè. Chán ngán cảnh bạn bè như vậy, ông đã vào quân đội, đi hết Hà Lan cho đến Đức.

Ngày 10 tháng 11 năm 1619 là ngày khai sinh môn hình học giải tích trong toán học hiện đại. Nhưng phải đợi 18 năm nữa phương pháp này của Đêcac mới được công bố. Mùa xuân 1620 ông tham gia chiến đấu ở Praha và đoàn quân chiến thắng đã đưa ông vào thành phố. Ở đó ông đã gặp công chúa Êlidabet lúc đó mới 4 tuổi, sau này trở thành đồ đệ trung thành của ông.

Năm 1623 ông trở về Pari sống ba năm trong suy tưởng, và đó là ba năm sung sướng nhất trong đời ông. Khi đó Galilê đã có nhiều phát minh xuất sắc về quang học, một nửa số học giả ở châu Âu thường xuyên sử dụng thấu kính, ống nhòm theo mốt của thời đại. Đêcac lúc đầu cũng tham gia, nhưng chẳng bao lâu ông đã rời bỏ những vấn đề cụ thể để quay sang nghiên cứu con người. Nhưng ông đã nhận xét một cách chua chát rằng số người hiểu được con người quá ít so với số người tưởng rằng mình hiểu hình học.

Năm 1646 Đêcac tới Hà Lan sống thanh bình và vẫn thường xuyên thư từ với những bè bạn lớn ở châu Âu. Ông vẫn tiếp tục nghiên cứu toán học với những suy nghĩ sâu sắc và độc đáo. Ông để ý đến bài toán nghịch lí của Zênông « Asin và con rùa » và đưa ra một lời giải khá độc đáo. Chúng ta không nói đến thành tựu rực rỡ của Đêcac về mặt triết học mà chỉ đề cập tới công trình toán học của ông. Ông đã làm lại hình học và đã làm cho hình học càng hiện đại hơn. Chính ông đã phát minh ra hệ tọa độ vuông góc mang tên ông. Từ đó « chúng ta đã dùng đại số để khám phá và nghiên cứu những định lí hình học về hình tròn ». Và như các nhà bác học đã đánh giá Đêcac : *« Nhờ có Đêcac mà chúng ta đã sử dụng đại số và giải tích làm hoa tiêu trên biển cả không bản đồ của không gian hình học của nó ».*

Như vậy, chúng ta đã đề cập được không gian nhiều chiều. Với mặt phẳng cần 2 tọa độ, với không gian bình thường của các vật thể cần 3 tọa độ, với hình học của cơ học và tính tương đối cần 4 tọa độ và cuối cùng với không gian của các nhà toán học, có khi phải cần đến n tọa độ, với $n > 4$.

Cho nên « *Đêcac không xem xét lại hình học mà sáng tạo ra nó* ». Đó là môn hình học giải tích, môn học đã đánh dấu một bước ngoặt quan trọng trong lịch sử toán học thế giới, gắn liền với tên tuổi bất tử của Đêcac.

« Tôi chỉ muốn lặng lẽ và nghỉ ngơi », đó là ao ước của ông. Ông sinh ngày 31 tháng 3 năm 1596 tại La Hay ở Pháp trong giai đoạn mà cả châu Âu đang có chiến tranh và mọi người đang phấp phỏng chờ đợi một sự cải tổ về tôn giáo và chính trị. Hai nhà toán học Fecma và Patxcan sống cùng thời với Đêcac.

Đêcac mất ngày 11 tháng hai năm 1650 lúc 54 tuổi, trước sự chứng kiến của cha Saclê mà ông đã yêu cầu được gặp vào những giờ phút cuối đời mình. Mười bảy năm sau thi hài ông mới được đưa từ Stôckhôn về đặt tại điện Păngtêông ở thủ đô Pari. Chính quyền nhà vua lúc đó không cho tổ chức buổi lễ công khai đón di hài Đêcac về Pari vì cho rằng những tư tưởng của ông không có lợi cho chế độ. Sau khi ông mất một thời gian, nhờ có Hồng y giáo chủ Risơliơ các công trình của ông mới được xuất bản.

ĐINÔPHĂNG

Chúng ta đã được làm quen với « phương trình Điôphăng ».

$$ax \pm by = c$$

Điôphăng là nhà toán học cổ Hi Lạp. Ông sinh khoảng năm 250 sau công nguyên. Trong lí thuyết số ông đã đóng góp hai vấn đề quan trọng là: *lí thuyết về phương trình Điôphăng* và *lí thuyết về xấp xỉ Điôphăng.*

ĐIÔPHĂNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH

Nghiệm tổng quát của phương trình Điôphăng bậc nhất $ax \pm by = c$ được Brăcmagupta, nhà toán học Ấn Độ (598–660 sau công nguyên) nêu lên trọn vẹn.

Nói như vậy không có nghĩa là Điôphăng không nêu được phương pháp tổng quát nào. Thật ra ông đã đưa ra nghiệm tổng quát của các tam giác Pitago:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

và nêu lên một phương pháp đặc biệt để giải các phương trình vô định dạng $Ax^2 + Bx + C = y^2$, khi A và C bằng 0, khi A hoặc B là một bình phương, hoặc khi $A + C$ là một bình phương còn B bằng 0.

Ông còn đưa ra phương pháp giải hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y^2 \\ dx^2 + ex + f = z^2 \end{cases}$$

Ông đã nhận xét là các số dạng $8n + 7$ không thể viết dưới dạng tổng của ba bình phương.

Chính Pitago và Platông đã trình bày phương pháp đặc biệt giải phương trình Điôphăng $x^2 + y^2 = z^2$ để tìm nghiệm nguyên. Những người Babilon cũng đã biết đến nghiệm tổng quát của phương trình đó:

$$x = p^2 - q^2 \text{ , } y = 2pq \text{ , } z = p^2 + q^2$$

Những người thuộc trường phái Pitago cũng đã biết vô số nghiệm của phương trình Điôphăng.

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

Điôphăng đã nêu lên cách giải 4 bài toán sau đây: «Tìm hai số biết:

a) tổng và tích của chúng;

b) tổng và tổng các bình phương của chúng;

c) tổng và hiệu các bình phương của chúng;

d) hiệu và tích của chúng;

Nếu cho tổng 2a thì ông đã chọn một số là a + s, còn số kia là a — s và được một phương trình của s. Nếu cho hiệu 2b thì chọn một số là s + b, còn số kia là s — b.

Tất cả các bài toán của mình dù phức tạp đến đâu, Điôphăng cũng đưa một cách có hệ thống về những phương trình có một ẩn. Còn những ẩn khác thì hoặc biểu diễn qua một ẩn hoặc cho chúng những giá trị tùy ý mà sau đó trong trường hợp cần thiết sẽ biến đổi đi để chúng thỏa mãn những điều kiện khác của bài toán.

Ông cũng là nhà toán học đã đưa vào cách gọi và cách viết gọn các lũy thừa của ẩn s, chẳng hạn (theo ngôn ngữ bây giờ):

1 là đơn vị, s là số, s^2 là bình phượng,

s^3 là lập phương, s^6 là lũy thừa bậc sáu.

Ngoài ra lại còn thêm cách gọi các đại lượng nghịch đảo của lũy thừa s^{-1}, s^{-2}, v.v. Ông không viết số 12 mà viết là « 12 đơn vị ».

Ông đã giải thích cách nhân và chia các lũy thừa của ẩn, cách nhân đa thức, cách ghép các số hạng cùng lũy thừa của s, cách chuyển các số hạng âm từ vế này sang vế kia của phương trình, cách trừ các số hạng bằng nhau ở cả hai vế của phương trình.

Sau một số phép biến đổi ở mỗi vế của phương trình chỉ còn lại một số hạng, lúc đó phương trình sẽ có dang:

$$as = b, \text{ hoặc } as^2 = bs, \text{ hoặc } as^2 = b$$

và sẽ giải được dễ dàng.

Ông cũng đã nêu ra cách giải rõ ràng về phương trình bậc hai dạng

$$as^2 + bs = c, \text{ hoặc } as^2 + c = bs, \text{ hoặc } bs + c = as^2.$$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỘC ĐÁO MỘT SỐ BÀI TOÁN

Bài toán — Hãy biểu thị một số cho trước bằng tổng của hai bình phương dưới dạng tổng của hai bình phương khác.

Sau đây là cách giải của Điôphăng.

« Giả sử số cho trước là 13, nó bằng tổng bình phương của 2 và 3. Giả sử một cạnh hình vuông là $s + 2$, cạnh hình vuông khác là một bội của s trừ đi 3, chẳng hạn đó là $2s - 3$. Như thế bình phương thứ nhất là $s^2 + 4s - 4$, bình phương thứ hai là $4s^2 + 9 - 12s$, cả hai là $5s^2 + 13 - 8s$. Nó phải bằng 13, từ đó $s = \frac{8}{5}$.

Vậy cạnh hình vuông thứ nhất là $s + 2 = \frac{18}{5}$, cạnh hình vuông thứ hai là $2s - 3 = \frac{1}{5}$. Các diện tích hình vuông sẽ là $\frac{324}{25}$ và $\frac{1}{25}$. Tổng của chúng rõ ràng bằng 13 ».

Bài toán — Tìm hai số sao cho bình phương của mỗi số cộng với số kia là một bình phương.

« Giả sử số thứ nhất là s. Muốn cho bình phương của nó cộng thêm số thứ hai là một bình phương ta đặt số thứ hai là $2s + 1$.

Bình phương của số thứ hai cộng thêm số thứ nhất sẽ là $4s^2 + 5s + 1$. Số này cũng phải là một bình phương. Ta chọn cạnh hình vuông là $2s - 2$, bình phương của nó sẽ là $4s^2 + 4 - 8s$ và từ đẳng thức

$$4s^2 + 5s + 1 = 4s^2 + 4 - 8s$$

ta được $s = \frac{3}{13}$ ».

Trong cả hai ví dụ này, phương pháp giải của Điôphăng như nhau. Ông chọn ẩn bằng biểu thức đơn giản đối với s, như $s + 2$ và $2s - 3$ trong bài toán thứ nhất. Ông sẽ được một phương trình bậc hai đối với s, rồi tìm cách hoặc bỏ số hạng chứa s^2, hoặc bỏ số hạng không đổi, để cách giải cuối cùng được đơn giản.

Ngoài ra Điôphăng còn đưa ra một phương pháp khác gọi là « *đẳng thức kép* » dựa vào công thức

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Phương pháp này được áp dụng khi cả hai biểu thức chứa s phải là bình phương. Trong trường hợp này hiệu của chúng phải bằng hiệu các bình phương (chẳng hạn $x^2 - y^2$) để có thể phân tích thành một tích hai thừa số ($x + y$ và $x - y$). Nửa tổng hai thừa số này sẽ là x, nửa hiệu của chúng là y.

Ông đã vận dụng phương pháp trên trong bài toán sau.

Bài toán — Thêm cùng một số vào hai số cho trước để được hai số mới là hai bình phương.

« Giả sử hai số cho trước là 2 và 3, thêm s vào chúng được $s + 2$ và $s + 3$ là hai bình phương. Ở đây ta có « đẳng thức kép ». Cách giải như sau : lấy hiệu ($s + 3$ và $s + 2$), sau đó chọn hai số sao cho tích bằng hiệu đó, chẳng hạn 4 và $\frac{1}{4}$. Nửa hiệu của chúng nhân với chính nó ta đặt bằng $s + 2$ hoặc nửa tổng của chúng nhân với chính nó ta đặt bằng $s + 3$. Trong cả hai trường hợp ta được $s = \frac{97}{64}$. Vậy số ta phải thêm vào là $\frac{97}{64}$. Rõ ràng nó thỏa mãn điều kiện của bài toán. »

Với **bài toán**: Tìm hai bình phương sao cho khi cộng thêm 12 vào mỗi bình phương đó ta lại được hai bình phương, ông đã giải dễ dàng (theo lời ông) bằng cách phân tích 12 dưới dạng hiệu của hai bình phương theo hai cách :

$$12 = 2.6 = (4 - 2)(4 + 2) = 4^2 - 2^2.$$

$$\text{Và } 12 = 3.4 = \left(3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Từ đó :

$$2^2 + 12 = 4^2 ; \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12 = \left(3\frac{1}{2}\right)^2$$

Điôphăng gọi phương pháp đó là *« phương pháp giả thiết* tam ».

Sau đây là một ví dụ minh họa đẹp đẽ về phương pháp này mà ông đã nêu ra.

Bài toán — Chia đơn vị thành hai phần và thêm vào mỗi phần một số cho trước để tích của chúng là một bình phương.

« Giả sử các số thêm vào là 3 và 5. Gọi một phần là s, phần kia là 1 — s. Nếu thêm 3 và 5 vào hai phần ta sẽ được s + 3 và 6 — s. Như thế tích của chúng sẽ là $3s + 18 - s^2$. Số này phải là một bình phương, ta đặt là $4s^2$. Nếu thêm s^2 vào hai vế ta được :

$$3s + 18 = 5s^2$$

Phương trình này không có nghiệm hữu tỉ. Hệ số 5 là một bình phương (số 4) cộng thêm 1. Muốn phương trình có nghiệm hữu tỉ thì phải lấy 18 lần hệ số đó và thêm vào bình phương một nửa của 3 để được một bình phương. Như vậy, đáng lẽ 4 ta phải tìm một bình phương khác để khi tăng thêm 1 và lấy 18 lần cộng với $2\frac{1}{4}$ sẽ được một bình phương ».

Với bài toán phụ này, Điôphăng đã đưa vào ẩn mới s (không phải ẩn cũ s ở trên). Ông viết tiếp như sau :

« Giả sử bình phương chưa biết là s^2. Ta có $s^2 + 1$, lấy 18 lần cộng thêm $2\frac{1}{4}$ hay $18s + 20\frac{1}{4}$ phải là một bình phương. Ta lấy tất cả 4 lần sẽ được số $72s^2 + 81$ là một bình phương. Đặt bình phương này bằng $(8s + 9)^2$ và được s = 18. Vậy bình phương phải tìm là 324.

Bây giờ trở lại bài toán ban đầu : $3s + 18 - s^2$ phải là một bình phương. Bây giờ lấy bình phương đó là $324s^2$, được

$s = \frac{78}{325} = \frac{6}{25}$. Vậy phần thứ nhất là $\frac{6}{25}$ và phần thứ hai là $\frac{19}{25}$ ».

Ta thấy rằng Điôphăng đã đưa ra nghiệm tổng quát của phương trình bậc hai dạng

$$as^2 = 2\,bs + c$$

Ông đã viết nghiệm dưới dạng phân số có mẫu số a (ở ví dụ trên a = 325) và chỉ rõ nghiệm chỉ là hữu tỉ khi $b^2 + ac$ là một bình phương. Công thức ông đã đưa ra là $s = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}$.

Ông cũng nêu ra cách giải thứ hai với phương pháp « giả thiết tạm ». Trước tiên ông tìm được nghiệm âm mà rõ ràng ông đã vứt bỏ nó đi, vì thế ông đã phải thay đổi giả thiết để cho một bất đẳng thức nào đó được thỏa mãn.

Phương pháp khác

Phần thứ nhất phải thêm vào 3 thì ta đặt bằng s trừ đi 3. Thế thì phần thứ hai sẽ là 4 — s và điều kiện sẽ là : $9s - s^2$ phải là một bình phương. Đặt bình phương này bằng $4s^2$, ta sẽ được $s = \frac{9}{5}$. Nhưng không thể trừ đi 3 đơn vị nếu s phải lớn hơn 3 mà nhỏ hơn 4.

Ta tìm s bằng cách chia 9 cho 5, tức là một bình phương cộng 1. Vì s nằm giữa 3 và 4 nên bình phương này cộng 1 phải nằm giữa 3 và $2\frac{1}{4}$, hay bình phương này phải nằm giữa 2 và $1\frac{1}{4}$. Vậy ta phải tìm bình phương lớn hơn $1\frac{1}{4}$ mà nhỏ hơn 2.

Đổi các số này thành phân số có mẫu số 64, tử số sẽ là 80 và 128. Bây giờ tất cả đã đơn giản : bình phương phải tìm là

$$\frac{100}{64}, \text{ tức là } \frac{25}{16}$$

Trở lại bài toán ban đầu, ta được phương trình

$$9s - s^2 = \frac{25}{16} s^2$$

Từ đó suy ra $s = \frac{144}{41}$. Vậy số thứ nhất là $\frac{[illegible]}{41}$, số thứ hai là $\frac{20}{41}$.

Điôphăng còn xét thêm tam giác vuông với cạnh hữu tỉ tức là cách giải phương trình Điôphăng.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Ông đã biết rằng với những tam giác vuông này ta có thể được hai số p và q theo công thức :

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2$$

Ông nêu thêm điều kiện phụ về cạnh hoặc về diện tích. Chẳng hạn :

Bài toán — Tìm tam giác vuông (có cạnh đo bằng số nguyên) mà cạnh huyền trừ đi mỗi cạnh góc vuông cho một lập phương.

Ông viết : « Giả sử với tam giác vuông ta dùng hai số s và 3. Thế thì cạnh huyền sẽ là $s^2 + 9$, hai cạnh góc vuông là 6s và $s^2 - 9$.

Nếu bây giờ lấy cạnh huyền trừ đi cạnh góc vuông $s^2 - 9$ thì được số 18, không phải là một lập phương.

Ta được số 18 như thế nào ? Nó là hai lần bình phương của 3. Như thế thay cho 3 phải lấy số mà hai lần bình phương của nó là một lập phương. Nếu ta lại gọi số đó là s (không phải s cũ ở trên(*)) thì $2s^2$ phải là một lập phương chẳng hạn s^3. Từ đó ta được $s = 2$.

Bây giờ ta lại lập tam giác với các số s (số s lúc đầu) và 2 (thay cho 3). Cạnh huyền sẽ là $s^2 + 4$, hai cạnh góc vuông là 4s

(*) Số s ở đây rõ ràng không được nhầm với số s đã nêu lúc đầu. Chúng ta có một ví dụ rất tiêu biểu của giả thiết tạm. Nếu với số 3 không thu được kết quả gì thì Điôphăng đã thay số này bằng số khác mà tạm thời ông ta cũng gọi là s.

và $s^2 - 4$. Ta thấy rằng hiệu giữa cạnh huyền $s^2 + 4$ và một cạnh góc vuông $s^2 - 4$ là một lập phương.

Nhưng hiệu giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông kia tức là biểu thức $s^2 + 4 - 4s$ cũng phải là một lập phương. Biểu thức này là hình vuông có cạnh $s - 2$. Như thế bài toán sẽ giải được nếu ta cho $s - 2$ bằng một lập phương. Giả sử lập phương đó là 8. Thế thì $s = 10$. Như vậy tam giác được tạo thành nhờ hai số 10 và 2. Cạnh huyền sẽ là 104, hai cạnh góc vuông là 40 và 96 ».

TẤM BIA TRÊN MỘ ĐIÔPHĂNG

Lịch sử đã ghi lại tóm tắt cuộc đời của Điôphăng trên tấm bia khắc trên mộ của ông dưới dạng bài toán như sau :

« Hỡi những người đi đường ! Ở đây yên nghỉ nhà toán học Điôphăng. Những dòng ghi dưới đây sẽ nói cho bạn biết ông ta thọ bao nhiêu tuổi. Một phần sáu cuộc đời ông là ở tuổi thiếu niên đầy hạnh phúc. Sống thêm $\frac{1}{12}$ tuổi đời thì râu lưa thưa bắt đầu xuất hiện trên mép. Điôphăng lấy vợ, nhưng sống thêm $\frac{1}{7}$ tuổi đời mà vẫn chưa có con. Năm năm sau đứa con đầu lòng của ông chào đời, thật là cả niềm sung sướng đối với ông. Song số phận cho phép cậu ta chỉ thọ được bằng $\frac{1}{2}$ tuổi đời của bố. Đứa con chết đi, cuộc sống trầm lặng đau thương đã dày vò ông suốt 4 năm trường rồi ông nhắm mắt lìa đời ».

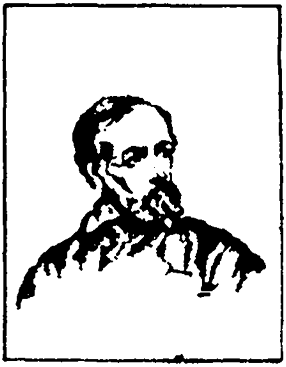
Nếu gọi x là tuổi của Điôphăng cho tới khi mất thì ta có phương trình sau :

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Giải ra tìm được $x = 84$. Như vậy ông lấy vợ năm 21 tuổi, có đứa con trai đầu vào năm 38 tuổi, con ông chết lúc ông 80 tuổi và ông mất lúc 84 tuổi.

ĐIRISƠLÊ

(PETER DIRICHLET)



Đirisơlê

Chúng ta hãy thử giải bài toán sau : « Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái chuồng sao cho trong mỗi chuồng không có quá 2 con ».

Thật vậy nếu trong mỗi chuồng không có quá 2 con thì số thỏ sẽ không quá $2 . 3 = 6$ (con), điều này mâu thuẫn với điều kiện đã cho là có 7 con thỏ.

Việc giải những bài toán cùng loại đòi hỏi dùng những cách lập luận giống nhau được gọi chung là « nguyên lí Đirisơlê ».

Đirisơlê là nhà toán học Đức sinh ngày 13 tháng 2 năm 1805 và mất ngày 5 tháng 5 năm 1859. Trong thời gian từ 1822 đến 1827 ông làm gia sư ở Pari và tham gia nhóm các nhà nghiên cứu trẻ tập hợp xung quanh nhà toán học Pháp Phuriê. Năm 1829 ông trở về Beclin công tác và từ năm 1831 là giáo sư trường Đại học Beclin. Sau khi Gauxơ mất (1855) ông là giáo sư trường Đại học Gơttinhghen.

Đirisơlê đã có nhiều cống hiến quan trọng trong lí thuyết số, đã chứng minh định lí về tồn tại vô số số nguyên tố trong cấp số cộng mà số hạng đầu và công sai là nguyên tố cùng nhau. Để giải bài toán này ông đã sử dụng hàm số giải tích được gọi là *hàm số* (hoặc chuỗi số) *Đirisơlê*. Ông cũng đã có những công trình đáng chú ý về cơ học và vật lí toán, đặc biệt về lí thuyết thế.

FECMA

(PIERRE FECMAT)

GIẢI THƯỞNG 10 VẠN MÁC

Fecma

Năm 1908 một người Đức rất yêu môn toán tên là Vônfken đã treo *giải thưởng 100 000 mác cho người nào chứng minh được định lí lớn Fecma*. Từ đó hàng trăm, hàng nghìn người đã tìm mọi cách để chứng minh gây nên một phong trào trong các hội khoa học, trên các báo chí về vấn đề này. Ở Hội Toán học Gớttinhghen trong ba năm đầu sau khi Vônfken tuyên bố về giải thưởng đã có trên một nghìn lời giải.

Fecma là nhà toán học lớn người Pháp sinh ngày 17-8-1601 và mất ngày 12-1-1665. Ông còn là một nhà luật học, từ năm 1631 đến khi mất ông làm việc tại nghị viện của thành phố Tuludơ. Ông nghiên cứu khá nhiều lĩnh vực của toán học như: lí thuyết số, hình học, đại số, lí thuyết xác suất. Phần lớn những phát minh toán của ông được biết đến do trao đổi thư từ với Patxcan, Đêcac, Valixơ v.v..

Ông cùng với Đêcac là những nhà toán học lớn đã đặt nền móng cho môn hình học giải tích. Chính ông đã đưa vào toán học trước cả Đêcac các vấn đề: tọa độ vuông góc, phương pháp tọa độ và áp dụng vào hình học, phương trình đường thẳng và các đường cong bậc hai. Trong công trình « Mở đầu về lí thuyết quỹ tích phẳng và không gian », ông đã chứng minh đường thẳng ứng với phương trình bậc nhất, các thiết diện cônic ứng với phương trình bậc hai. Ông cũng đã nghiên cứu về dạng tổng quát của phương trình bậc nhất và bậc hai của phép biến đổi tọa độ (chuyển gốc tọa độ và quay trục).

Trong công trình *«phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất»* (chỉ đến năm 1679 sau khi Fecma chết mới được công bố) Fecma đã đưa vào toán học phép toán mà nay ta gọi là phép tính vi phân và áp dụng chẳng những để tìm cực đại và cực tiểu mà còn để giải những bài toán về tìm tiếp tuyến với đường cong.

Ngoài ra ông còn nghiên cứu cả vật lí và đưa ra *«nguyên lí Fecma»* là nguyên lí cơ bản về quang hình học trong đó có định luật về phản chiếu và khúc xạ của ánh sáng. Toàn bộ công trình của Fecma chỉ được biết đến vào năm 1669 khi con trai ông công bố tuyển tập nghiên cứu của bố mình.

Một số mệnh đề toán học do Fecma nêu ra cũng có sai lầm. Chẳng hạn Fecma cho rằng tất cả các số có dạng $2^{2^n} + 1$ đều là số nguyên tố. Chính Ơle đã chứng minh rằng với $n = 5$ thì sẽ được một hợp số.

XUNG QUANH ĐỊNH LÍ LỚN FECMA

Trong lịch sử toán học thế giới, «định lí lớn Fecma» có lẽ là định lí nổi tiếng nhất. Mặc dầu nhà toán học lỗi lạc Fecma nêu lên cách đây ba thế kỉ nhưng *cho đến nay người ta vẫn không biết là nó đúng hay sai*. Chưa có ai chứng minh được nó và cũng chưa có ai nêu được một chứng minh để bác bỏ nó.

Năm 1637 Fecma đã ghi như sau:

«Một lập phương không bao giờ là tổng của hai lập phương, một lũy thừa bậc bốn không bao giờ là tổng của hai lũy thừa bậc bốn và một cách tổng quát không có một lũy thừa nào số mũ lớn hơn 2 lại là tổng của hai lũy thừa tương tự.

Tôi đã tìm ra một cách chứng minh khá thú vị về mệnh đề trên, nhưng không phải là điều nên ghi ở chỗ lề cuốn sách này».

Nếu Fecma có chỗ để ghi cách chứng minh của ông ta thì một trong những bí ẩn của lịch sử toán học không tồn tại cho đến ngày nay!

Sau khi điều ghi chú này được công bố các nhà toán học đương thời đã bắt tay vào việc nghiên cứu. Tại sao? Vì Fecma là một nhà toán học lỗi lạc thường nêu lên nhiều kết quả mà không ghi lại chứng minh, nhưng sau đó được các nhà toán học tiếp tục chứng minh lại, trừ mệnh đề sau đây mà ta vẫn thường gọi là «định lí lớn Fecma»:

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ trong đó x, y, z là ba số nguyên và n là số mũ nguyên lớn hơn 2 không có nghiệm (trừ nghiệm tầm thường $x = y = z = 0$).

Cái khó của định lí này là nêu lên một điều không thể có, mà trong toán học việc chứng minh một điều có thể có dễ hơn là chứng minh một điều không thể có.

Thật thế muốn chứng minh điều không thể xảy ra không phải chỉ xác lập được một số trường hợp riêng nào đó (dù số trường hợp này là lớn) nhưng phải với tất cả trường hợp có thể hình dung ra được. Vì vậy điều tốt nhất là phải làm sao tìm được một cách chứng minh tổng quát đúng cho mọi trường hợp mà không loại trừ trường hợp nào.

Vì vậy ta hãy tưởng tượng việc xác lập định lí lớn Fecma như sau: với mỗi số mũ $n > 2$ ta lần lượt thử bộ 3 số nguyên (x, y, z) để chắc chắn rằng $x^n + y^n$ không bằng z^n. Cũng cần nói thêm việc này nếu giao cho máy vi tính mạnh nhất thế giới thì cũng không bao giờ xong được. Lí do hết sức đơn giản: có vô số số mũ n và với mỗi số mũ đó lại có vô số bộ 3 số (x, y, z) mà ta cần phải thử.

Nhưng dù sao máy vi tính vẫn có ích. Ba thập kỉ vừa rồi, dùng máy vi tính người ta đã chứng minh được định lí lớn Fecma đúng với tất cả số mũ $n < 125000$. Nói cách khác từ nay trở đi ta biết rằng:

Với $2 < n < 125000$ thì phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm.

Hiện nay nếu ta có thể chứng tỏ rằng: tồn tại một phản ví dụ của định lí lớn Fecma, tức là tồn tại một số mũ $n > 125000$ và một bộ ba số nguyên (x, y, z) mà $x^n + y^n = z^n$ thì ta sẽ không còn phải kiểm nghiệm nó bằng cách tính x^n, y^n để xem tổng của chúng có bằng z^n không. Lí do chỉ vì tính toán như thế thì phải dùng nhiều số quá lớn!

Ta chỉ có thể chứng minh rằng z phải nhất thiết lớn hơn số mũ n và do đó z^n phải lớn hơn 125000^{125000} một số khổng lồ có đến 5 triệu chữ số, chưa kể là phản ví dụ này sẽ dẫn đến những số khổng lồ hơn nữa!

Tuy nhiên những điều nêu ở trên không đủ để chứng minh phản ví dụ này không tồn tại.

Nhà toán học vĩ đại Ơle đã chứng minh cho $n = 4$, sau đó năm 1823 nhà toán học người Pháp Lơgiăngđrơ đã chứng minh cho $n = 5$. Mười lăm năm sau Lamê đã chứng minh cho số nguyên tố $n = 7$. Nhưng có vô số số nguyên tố nên Lamê cũng không làm sao đi tới trường hợp tổng quát được.

Rồi lần lượt đến nhà toán học người Đức Kummơ đã dùng đến số phức và năm 1847 ông đã đạt kết quả rất ngạc nhiên là xây dựng được định lí cho tất cả số mũ nguyên tố nhỏ hơn 100, trừ ba số 37, 59 và 67.

Từ bấy đến nay một điều ngờ vực nổi lên: có thật là Fecma đã tìm ra được cách chứng minh không hay điều ông ta nêu ra chỉ là giả thuyết và chắc đâu là đúng?

Nhưng ai mà biết được!

Vừa qua nhà toán học trẻ CHLB Đức Faltinh đã đưa ra cách chứng minh một kết quả rất quan trọng dưới danh từ «*định lí Faltinh*» mà 60 năm nay các nhà toán học nghiên cứu chưa ra.

Theo định lí Faltinh thì phương trình $x^n + y^n = z^n$ chỉ có một số hữu hạn nghiệm là những số nguyên tố cùng nhau và nếu với mọi $n \geqslant 4$ mà định lí Fecma có thể sai thì chỉ có thể sai ở một mức độ nào đó.

Định lí Falting không đủ để xây dựng định lí lớn Fecma nhưng đã cung cấp cho các nhà toán học thế giới một chỉ dẫn quan trọng, vì cho tới nay chưa ai có ý niệm về số nghiệm có thể có của phương trình $x^n + y^n = z^n$. Đây là một khám phá quan trọng được thế giới toán học đánh giá cao, mở ra một khả năng mới để chứng minh định lí lớn Fecma sau 300 năm nay và chắc chắn là không dừng lại ở đó.

FIBÔNAXI

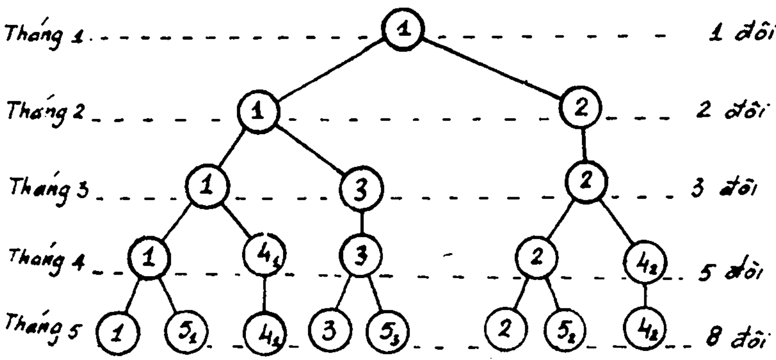
(FIBONACCI)

CÂU CHUYỆN THỎ ĐẺ CON

Đầu thế kỉ thứ 13 vào năm 1202 nhà toán học người Italia Fibônaxi đã xuất bản một cuốn sách tên là « Sách về bàn tính » trong đó có *bài toán về « thỏ đẻ con »* như sau:

« Giả sử thỏ đẻ theo quy luật là: một đôi thỏ cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con, mỗi đôi thỏ con sau 2 tháng lại bắt đầu sinh một đôi thỏ nữa, rồi sau đó mỗi tháng tiếp tục đẻ ra một đôi thỏ, v.v. và giả sử tất cả các thỏ đều sống. Hỏi nếu có một đôi thỏ nuôi từ tháng giêng và đẻ con vào tháng hai thì đến cuối năm có bao nhiêu đôi thỏ tất cả? ».

Ta hãy minh họa quy luật thỏ đẻ con bởi sơ đồ sau (H.12):



Hình 12

Trong tháng giêng chỉ có 1 đôi thỏ.

Đôi thỏ 1 đẻ ra đôi thỏ 2 vào đầu tháng hai. Như vậy trong tháng hai có 2 đôi thỏ.

Vào đầu tháng ba đôi thỏ 1 đẻ ra đôi thỏ 3, còn đôi thỏ 2 mới được một tháng chưa đẻ được. Như vậy trong tháng ba có 3 đôi thỏ.

Vào đầu tháng tư đôi thỏ 1 đẻ ra đôi thỏ 4_1, đôi thỏ 2 đẻ ra đôi thỏ 4_2 còn đôi thỏ 3 mới được một tháng chưa đẻ được. Như vậy trong tháng tư có 5 đôi thỏ.

Vào đầu tháng năm đôi thỏ 1 đẻ ra đôi thỏ 5_1, đôi thỏ 2 đẻ ra đôi thỏ 5_2, đôi thỏ 3 đẻ ra đôi thỏ 5_3, còn các đôi thỏ 4_1 và 4_2 mới được một tháng chưa đẻ được. Như vậy trong tháng năm có 8 đôi thỏ.

Ta có dãy số sau đây nêu lên số đôi thỏ từ tháng giêng đến cuối tháng năm:

1, 2, 3, 5, 8

Ta nhận thấy ngay rằng: mỗi số hạng trong dãy số đó bắt đầu từ số hạng thứ ba thì bằng tổng hai số hạng đứng liền trước nó: $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$. Điều đó có thể mở rộng như sau:

« Một cách tổng quát ta có $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ với $n \geqslant 3$ ».

Ta hãy giải thích điều này. Trước hết lấy một trường hợp riêng ví dụ u_5. Qua sơ đồ ta thấy rằng số đôi thỏ của tháng thứ năm là $u_5 = 8$, nhiều hơn số đôi thỏ của tháng thứ tư $u_4 = 5$ là 3 đôi. Sở dĩ như vậy là vì vào đầu tháng năm có một số đôi thỏ $u_3 = 3$ của tháng ba (3 đôi thỏ này bao gồm số đôi thỏ có thể đẻ vào 1 tháng sau và số đôi thỏ có thể đẻ vào 2 tháng sau, cho nên sau 2 tháng, đến đầu tháng năm, tất cả 3 đôi thỏ đều đẻ và đẻ ra 3 đôi thỏ con). Vậy $u_5 = u_3 + u_4$.

Một cách tổng quát, số đôi thỏ u_n của tháng thứ n nhiều hơn số đôi thỏ u_{n-1} của tháng $(n - 1)$ là một số x đôi thỏ mới đẻ, số x này chính bằng số đôi thỏ u_{n-2} của tháng $(n - 2)$ vì số đôi thỏ u_{n-2} của tháng $(n - 2)$ bao gồm số đôi thỏ có thể đẻ vào 1 tháng sau và số đôi thỏ có thể đẻ vào 2 tháng sau, cho nên sau 2 tháng, đến đầu tháng n, thì tất cả số đôi thỏ u_{n-2} đều đẻ và đẻ ra u_{n-2} đôi thỏ con. Vậy $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$.

Tính lần lượt u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, v.v. theo công thức đó ta được dãy số:

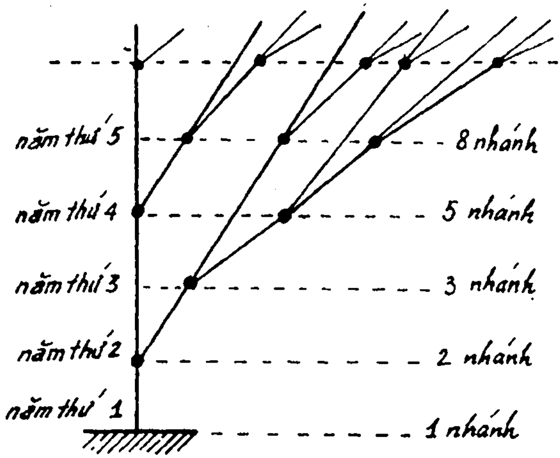
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 141, 233, ... (+)

Ta tìm được $u_{12} = 233$, tức đến *cuối năm có 233 đôi thỏ.*

Nếu trước số hạng thứ nhất của dãy số (+) ta thêm một số hạng nữa là 1 thì ta cũng không thay đổi quy luật tạo thành dãy số, tức là ta có 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... với $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$. Dãy số này gọi là *dãy số Fibônaxi.*

QUY LUẬT SINH TRƯỞNG CỦA CÂY

Dãy số này có nhiều tính chất lí thú. Chẳng hạn ta lấy ví dụ sau đây về quy luật sinh trưởng của cây (H.13). Một cây



Hình 13

đâm nhánh như sau: cây mọc lên được 1 năm thì bắt đầu đâm nhánh, sau đó cứ hai năm thân chính lại đâm ra 1 nhánh, quy luật ấy của thân chính cũng ứng dụng cho mọi nhánh mọc ra, tức là mỗi nhánh sau khi mọc ra 1 năm thì đâm ra 1 nhánh con, và nhánh chính thì sau đó cứ 2 năm lại đâm ra 1 nhánh. Coi thân chính là 1 nhánh đặc biệt thì theo hình 13 ta thấy số nhánh trong từng năm chính là các số hạng của dãy số Fibônaxi: 1, 2, 3, 5, 8.

1. Tổng của n số hạng đầu tiên của dãy số Fibônaxi

Ta chứng minh rằng:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1 \qquad (1)$$

Thật thế:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - u_2 \\ u_2 &= u_4 - u_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1} &= u_{n+1} - u_n \\ u_n &= u_{n+2} - u_{n+1} \end{aligned}$$

Cộng từng vế ta được:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2 = u_{n+2} - 1 \text{ (vì } u_2 = 1)$$

2. Tổng các số Fibônaxi ở vị trí lẻ (số hiệu lẻ)

Ta chứng minh rằng:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n} \qquad (2)$$

Thật thế:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_3 &= u_4 - u_2 \\ u_5 &= u_6 - u_4 \\ &\dots\dots\dots \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2} \end{aligned}$$

Chỉ cần cộng từng vế ta sẽ được kết quả trên.

3. Tổng các số Fibônaxi ở vị trí chẵn (số hiệu chẵn)

Ta chứng minh rằng:

$$u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \qquad (3)$$

Dựa vào (1) ta có:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

Trừ từng vế đi đẳng thức (2) ta được:

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$$

4. Tổng các bình phương của n số Fibônaxi đầu tiên

Ta chứng minh rằng:

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1} \qquad (1)$$

Để ý rằng:

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$$

Ta cộng từng vế các đẳng thức sau:

$$u_1^2 = u_1 u_2$$

$$u_2^2 = u_2 u_3 - u_1 u_2$$

$$u_3^2 = u_3 u_4 - u_2 u_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n$$

ta sẽ được công thức (1)

Dùng phương pháp quy nạp toán học ta có thể chứng minh được nhiều công thức biểu thị sự liên hệ giữa các số Fibônaxi. Cần chú ý thêm là trong dãy số Fibônaxi $u_1 = 1$ và $u_2 = 1$, nên từ u_n và u_{n+1} tới u_{n+2} có công thức truy toán sau:

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$$

Ngoài ra còn có một số *«dấu hiệu chia hết của các số Fibônaxi»* dựa vào số hiệu của chúng.

a) Số Fibônaxi là chẵn khi và chỉ khi số hiệu của nó chia hết cho 3 (chẳng hạn $u_3 = 2$, $u_6 = 8$, $u_9 = 34$, ...).

b) Số Fibônaxi chia hết cho 3 khi và chỉ khi số hiệu của nó chia hết cho 4 (chẳng hạn $u_8 = 21$).

c) Số Fibônaxi chia hết cho 4 khi và chỉ khi số hiệu của nó chia hết cho 6 (chẳng hạn $u_6 = 8$, $u_{12} = 144$).

d) Số Fibônaxi chia hết cho 5 khi và chỉ khi số hiệu của nó chia hết cho 5 (chẳng hạn $u_5 = 5$, $u_{10} = 55$).

e) Số Fibônaxi chia hết cho 7 khi và chỉ khi số hiệu của nó chia hết cho 8 (chẳng hạn $u_8 = 21$).

Tuy nhiên có một điều thú vị là:

— không có số Fibônaxi nào khi chia cho 8 lại dư 4 ;

— không có số Fibônaxi với số hiệu lẻ nào lại chia hết cho 17.

PHÉP CHIA HOÀNG KIM

Ta hãy chia đoạn thẳng AB bằng đơn vị dài (H.14) thành hai phần sao cho độ dài phần lớn là trung bình nhân giữa độ dài phần nhỏ và độ dài cả đoạn thẳng.

Hình 14

Gọi x là độ dài phần lớn, độ dài phần nhỏ sẽ là 1 — x, ta có tỉ lệ thức sau : (H.14)

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Từ đó :

$$x^2 = 1 - x$$

Nghiệm dương của phương trình này là $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, vì theo tỉ lệ thức trên thì tỉ số :

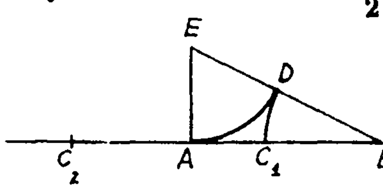
$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = k$$

Phép chia này (điểm C_1) gọi là phép chia theo trung tỉ và ngoại tỉ, còn được gọi là « phép chia hoàng kim »

Cách dựng điểm C_1 không có gì khó. Giả sử AB = 1, từ A kẻ đường vuông góc với AB trên lấy điểm E sao cho AE = $\frac{1}{2}$ (H.15). Ta có :

$$EB = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Lấy E làm tâm ta vạch cung qua A cắt EB tại D, ta được :

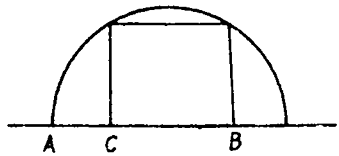


Hình 15

$$BD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Lấy B làm tâm lại vạch cung qua D ta tìm được điểm C_1. Còn điểm C_2 ta dựng được dựa vào nhận xét $AC_2 = BC_1$.

Trong hình học ta cũng thường gặp phép chia hoàng kim. Chẳng hạn hình vuông nội tiếp trong nửa hình tròn (H.16). C là điểm chia đoạn AB theo phép chia hoàng kim.



Hình 16

Cạnh a_{10} của hình thập giác đều nội tiếp trong hình tròn bán kính R như ta đã biết bằng:

$$a_{10} = 2R\sin\frac{360^\circ}{2\,.\,10} = 2R\sin 18^\circ$$

Ta tính sin 18° dựa vào các công thức $\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$ và $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$. Ta có:

$$\sin 72^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) \qquad (*)$$

Vì $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ \neq 0$ nên từ (*) suy ra

$$1 = 4\sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ)$$

Như thế $\sin 18^\circ$ là một nghiệm của phương trình

$$1 = 4x(1 - 2x^2) \text{ hay } 8x^3 - 4x + 1 = 0$$

Phương trình này có thể viết:

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

mà nghiệm là:

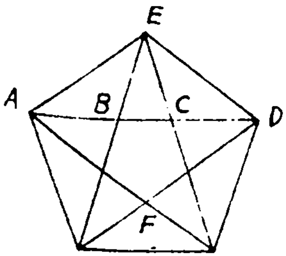
$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},\ x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

Vì $\sin 18^\circ$ là số dương khác $\frac{1}{2}$ nên $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

Vậy $a_{10} = 2R\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = R\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Nói cách khác a_{10} bằng đoạn lớn của bán kính hình tròn trong phép chia hoàng kim.

Ta xét một ngũ giác đều. Các đường chéo của nó tạo thành một ngũ giác sao (H.17)



Hình 17

Ta có $\widehat{AFD} = 108°$, $\widehat{ADF} = 36°$. Theo định lí hàm số sin thì:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36° = 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Rõ ràng AF = AC và ta được:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy điểm C chia đoạn AD theo phép chia hoàng kim.

Ta nhận xét thêm là theo phép chia hoàng kim thì $\frac{AC}{CD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Do AB = CD nên ta có:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy trong các đoạn thẳng BC, AB, AC, AD thì mỗi đoạn sau gấp $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lần đoạn ngay trước nó.

GALOA
(EVARIST GALOIS)

NGÔI NHÀ Ở THÀNH PHỐ BUALAREN

Galoa

Trong mấy giờ đồng hồ, trước khi vĩnh biệt cõi đời vào tuổi 20, nhà toán học trẻ người Pháp Èvarit Galoa đã giải quyết toàn vẹn vấn đề đã làm băn khoăn các nhà toán học trong hàng bao thế kỉ: « *Trong những điều kiện nào thì một phương trình có thể giải được?* » Công trình đã đưa ông lên địa vị các nhà toán học hàng đầu của thế giới.

Cách Pari thủ đô nước Pháp khoảng 10 km là thành phố Bualaren, nơi cậu bé Galoa cất tiếng chào đời vào ngày 26 tháng 10 năm 1811. Thành phố này đến nay vẫn sống thanh bình như vào đầu thế kỉ thứ 19. Dọc hai bên đường phố Lớn vẫn còn lại những ngôi nhà với những mái nhọn xưa kia. Nhà cửa, cầu cống vẫn là những cảnh vật cũ không có gì thay đổi lớn.

So với năm 1829 tòa thị chính của thành phố vẫn giữ được vẻ khiêm tốn xưa kể từ khi ở đó có gắn cái biển kỉ niệm mang dòng chữ : « Những người dân thành phố biết ơn ngài Nicôla Gabrien Galoa thị trưởng thành phố suốt 15 năm liên tục ». Ngoài ra ở thành phố Bualaren này lại có một đường phố mang tên bố của Êvarit Galoa.

Trước ngôi nhà số 54 của phố Lớn thành phố Bualaren có một tấm bảng kỉ niệm mang dòng chữ : « Ở đây là nơi sinh ra nhà toán học lỗi lạc người Pháp Êvarit Galoa, mất năm 20 tuổi, 1811—1832 ». Tấm bảng này do một giáo sư toán học của trường Đại học Tổng hợp Pari, công dân của thành phố Bualaren, tặng vào ngày 13-6-1909. Tại buổi lễ gắn tấm bảng này có nhà toán học Pháp Đacbu, thư kí thường trực Viện Hàn lâm khoa học Pháp, giáo sư trường Sư phạm cao cấp (trường Đại học nổi tiếng nhất của nước Pháp), nơi mà nhà toán học lớn Galoa không được vào học, chỉ vì bị vùi dập tài năng.

ĐỜI HỌC SINH CỦA GALOA VÀ NGƯỜI THẦY RISA

Bố Galoa là một trí thức, ham chuộng tự do và rất ghét phải bảo hoàng. Từ bé cho đến năm 11 tuổi, Galoa chỉ học ở nhà với mẹ. Bà mẹ giáo dục con rất dịu dàng, nhưng cũng rất nghiêm khắc, tính tình bà cương trực, thẳng thắn.

Tháng 10 năm 1823, vừa tròn 12 tuổi, Galoa rời khỏi tổ ấm gia đình và bắt đầu vào học trường trung học nổi tiếng Lu-i Đại đế. Trường này với nội dung và hình thức tổ chức của nó thời đó giống như một nhà tù, với các song sắt và các cửa luôn luôn đóng chặt. Hầu hết học sinh ở đó đều là con em quý tộc, thuộc tầng lớp tư sản lớn trong xã hội Pháp.

Năm 1823, nước Pháp vẫn còn chịu ảnh hưởng của cuộc cách mạng 1789. Vẫn còn nhiều tổ chức kín, những hoạt động cách mạng, thỉnh thoảng lại có bạo động. Phong trào bên ngoài đó đã vang dội vào trường học và học sinh đã nhiều lần phản đối chế độ hà khắc của nhà trường. Để đối phó lại người ta đuổi bất cứ ai có tư tưởng, hành động chống đối.

Sự đè nén áp bức, không khí đấu tranh ấy lần đầu tiên đã tác động đến tâm hồn non trẻ của Galoa. *Năm thứ hai ở trung học đã đánh dấu một bước ngoặt trong đời Galoa : thiên tài toán học đã nảy nở ở cậu bé.* Trước đó, chàng thiếu niên này đã từng được giải trong các kì thi chọn học sinh giỏi tiếng Hi Lạp, nhưng đến bây giờ thì chỉ mải mê với toán và chán học các môn khác. Vì thế cuối năm nhà trường bắt cậu ta phải ở lại lớp để tiếp tục học các bài la tinh, Hi Lạp chán ngấy, còn về toán thì cậu đã vượt xa các bạn cùng lớp.

Cuốn «Hình học» của Lơgiăngđrơ là nội dung học trong hai năm cho những học sinh giỏi toán thì Galoa đã đọc một mạch từ đầu đến cuối chỉ trong vài ngày, nhẹ nhàng như xem tiểu thuyết. Cuốn này đã trình bày một cách chặt chẽ nội dung toán học của 8 cuốn sách của Ơclit. Trong lòng cậu bé đã bừng lên một niềm hứng thú và phấn khởi, cậu bắt đầu không chú ý đến học bài ở trường nữa mà bắt đầu học những sách khó hơn của Lagrăng như « phép giải phương trình số », « lí thuyết về hàm giải tích », « các bài giảng về lí thuyết hàm số ». Bài toán đầu tiên trong số những bài toán mà Lagrăng đưa ra đã dẫn Galoa đến việc áp dụng tư tưởng về nhóm. Những vấn đề này tất nhiên chưa nói lên được thiên tài đặc biệt của Galoa mà chỉ chứng tỏ khả năng tư duy sáng tạo của ông đã dẫn dắt ông sớm thấy được những vấn đề lớn của khoa học, không bị sa vào những điều nhỏ nhặt.

Năm 1827 trong những ngày học ở trường, khả năng phát hiện những vấn đề chung còn nhiều hơn khả năng toán học của ông. Ông vẫn rất thú vị đối với những môn học khác. Tiếc thay khi đó những môn học này được dạy cẩu thả như môn đại số ở trường ông học. Tất cả là do sách giáo khoa soạn chưa tốt. Galoa rất khó chịu với những phương pháp của các thầy giáo, còn các thầy giáo thì không nhận ra được khả năng phát triển trí tuệ đặc biệt của học sinh.

Những tài liệu để lại trong thời gian này cho biết người ta đã nhận xét về ông như thế nào, chẳng hạn «Galoa không bao giờ chịu ngồi yên vì những câu hỏi về toán luôn luôn nảy ra trong đầu óc của Galoa».

Cũng trong thời gian này ông đọc những công trình của Ơle, Gauxơ, Giacôbi và ông cảm thấy rằng mình có thể làm như họ. Do đó ông trở nên can đảm hơn. Cuối năm học ông không theo được một giờ học nào về chuyên đề toán mà phải tự mình chuẩn bị cho kì thi vào trường Bách khoa. Tiếc thay ông đã thi hỏng.

Mặc dù thi hỏng vào trường Bách khoa, nhưng đến tháng 10 năm 1828, lúc mới 17 tuổi, Galoa đã từ lớp toán sơ cấp chuyển sang học lớp toán đặc biệt của trường Trung học Lu-i Đại đế.

May mắn cho Galoa là lần đầu tiên được gặp một thầy giáo hiểu tài năng và tận tình giúp đỡ. Đó là *giáo sư Risa*. Ông này đã tận tâm giúp đỡ, giáo dục bao nhiêu học sinh của mình và hễ nhận thấy một người nào có năng khiếu thì ông không quản ngại, quên cả mệt nhọc để giúp đỡ đến nơi đến chốn. Trong lịch sử khoa học của nước Pháp, Risa được coi là một giáo sư có tài. Trong số những học sinh của ông thi vào trường Bách khoa có Lơ Verié, nhà thiên văn và chủ nhiệm đầu tiên của khoa cơ học thiên thể của trường Đại học Xoóchon và nhà toán học nổi tiếng Hecmit. Chính Hecmit là người được giáo sư Risa tin cẩn, sau này đã giao bản thảo công trình của Galoa mà nay được lưu trữ tại thư viện của Viện Hàn lâm khoa học Pháp.

Học sinh của giáo sư Risa rất khâm phục cách giảng dạy diệu kì của ông. Sự thành công trong lĩnh vực toán học và khoa học của nhiều học sinh của ông ở trường Bách khoa phần lớn do công lao đào tạo của ông. Risa nhận thấy ngay năng khiếu của Galoa và rất kiêu hãnh về những kết quả Galoa đạt được. Những lời giải các bài toán mà Galoa đưa ra bao giờ cũng làm cho giáo sư Risa hết sức thú vị và khâm phục. Ông luôn luôn coi Galoa là học sinh tài năng nhất trong đám học sinh của mình nên hết sức lắng nghe khi Galoa phát biểu trước bạn bè cùng lớp. Những tài liệu mà giáo sư Risa để lại giúp ta đánh giá cả thầy lẫn trò : «Người học trò này có năng khiếu đặc biệt về toán», «Galoa chỉ chuyên nghiên cứu về những lĩnh vực cao cấp của toán học», và «Galoa hơn hẳn tất cả những người bạn của mình».

Chính giáo sư Risa là người đã giúp Galoa đăng những bài báo đầu tiên của mình và thuyết phục Galoa gửi thông báo công trình đến Viện Hàn lâm. Bài báo của Galoa đã được in trong số tháng ba của «Les annales de mathématiques», tạp chí về toán đầu tiên của nước Pháp xuất bản năm 1818.

Ngày mồng 1 tháng 6 có cuộc họp của Viện Hàn lâm. Hai nhà toán học Poangxô và Côsi được trao nhiệm vụ xem xét công trình của Galoa gửi tới. Côsi đã không cho một kết luận nào ! Ông ta đã để mất bản thảo của Galoa, thật là tai hại ! trước đây ông cũng đã từng để mất bản thảo của Abel. Điều đó mở đầu một chuỗi câu chuyện vô lí làm cho Galoa ác cảm với Viện Hàn lâm và bắt đầu oán ghét xã hội mình đang sống.

Kết thúc năm học, Galoa lại thi vào trường Bách khoa và một lần nữa lại thi hỏng, đó là năm 1829 khi ông 18 tuổi. Giáo sư Risa và các bạn của Galoa rất buồn, không ai nghi ngờ tài năng của Galoa, nhưng giải thích điều xảy ra như thế nào ? Khi vào vấn đáp, Galoa và giám khảo đã thảo luận về một vấn đề toán. Giám khảo đã nhầm, Galoa bực mình về những câu hỏi và vì thất vọng mất bình tĩnh, ông đã ném khăn lau bảng vào mặt giám khảo. Tất nhiên là ông hỏng thi và theo luật của trường Bách khoa lúc bấy giờ, ai đã thi hai lần không đỗ thì không được thi nữa.

Trong thời gian nằm ở nhà tù Xanh Pêlaghi nhớ lại kì thi này, Galoa đã viết rằng ông đã phải nghe những lời điên rồ của bọn chấm thi. Điều này cho phép chúng ta nghĩ rằng có ai đó đã mỉa mai Galoa khi ông trình bày những quan điểm của mình. Những người hỏi thi dốt nát đã cho Galoa bao nhiêu điểm để đánh hỏng ông, thì không ai biết cả

Nếu Galoa được vào trường Bách khoa này thì rõ ràng ông đã có điều kiện thuận lợi để làm việc yên tĩnh trong hai năm. Trong thời gian đó, những sinh viên trường Bách khoa đã có khả năng nghiên cứu những công trình khoa học. Hầu hết những người có năng lực này đã vì khoa học mà từ chối mọi địa vị, chức tước mà nhà nước dự định giành cho họ sau khi ra trường. Phải nói rằng những cựu sinh viên trường Bách khoa thời đó đã làm rạng rỡ tên tuổi trường này trên thế giới. Giờ đây tình hình này đã hoàn toàn thay đổi. Bọn tư sản mại bản đã cố sử dụng những cựu sinh viên của trường để phục vụ cho những mục đích không phải khoa học. Cho nên việc đào tạo những nhà toán học đã chuyển sang các trường đại học khác.

Năm 1829, một tai họa lại đến với Galoa : đó là cái chết đau đớn của bố ông. Bố Galoa là một người thẳng thắn, cương trực. Do một sự áp bức của bọn cầm quyền, ông uất ức và tự sát. Galoa đã chứng kiến cái cảnh quan tài của bố hạ huyệt trong sự thương xót và bất bình của quần chúng xung quanh, ông càng thấy xã hội là bất công và xấu xa.

GALOA THAM GIA CÁCH MẠNG

Tháng 2 năm 1830, lúc 19 tuổi, Galoa được nhận vào trường đại học. Trong năm đó, ông đã hoàn thành một công trình về phương trình đại số và gửi lên Viện Hàn lâm để dự một kì thi dành riêng cho các nhà toán học. Thư kí của Viện mang bản thảo về nhà xem, nhưng chưa kịp xem thì bị chết. Về sau người ta không tìm thấy dấu vết của bản thảo đó nữa.

Sẵn có ác cảm với xã hội bất công và bản thân mình sau nhiều lần bị vùi dập, tư tưởng của Galoa đã có chuyển hướng quyết định. « Không thể là một sự tình cờ. Xã hội này — theo Galoa — đã kìm hãm khả năng của con người ». Và Galoa đã tích cực tham gia vào các tổ chức chính trị của nhóm cộng hòa.

Galoa vận động các bạn học tham gia phong trào cách mạng. Có đêm Galoa đã bỏ trường trốn ra ngoài để hoạt động. Và tất nhiên, Galoa bị đuổi. Cùng cực, Galoa phải mở lớp dạy tư để kiếm ăn. Một thanh niên 19 tuổi mở lớp dạy từ một số lí thuyết do mình sáng tạo ra : thuyết về số ảo, thuyết về nghiên cứu phương trình theo căn thức, v.v. Cũng rất dễ hiểu là lớp này không có người học ! Galoa đành phải xin vào pháo binh để có cơm ăn !

Sau đó, được Poátxông, nhà toán học nổi tiếng lúc bấy giờ giúp đỡ, Galoa lại viết và gửi tiếp lên Viện Hàn lâm một công trình về cách giải tổng quát các phương trình, mà ngày nay gọi là *thuyết Galoa*. Poátxông nhận trình bày công trình của Galoa trước Viện Hàn lâm. Nhưng do không nghiên cứu kĩ tài liệu viết quá cô đặc của Galoa, Poátxông đã trình bày sơ lược và kết luận : « tài liệu viết khó hiểu... »

Hi vọng cuối cùng thế là hết ! Có lúc Galoa đã thốt lên « Nếu cần làm cho nhân dân nổi loạn thì tôi sẵn sàng hiến bản thân tôi».

Tháng 5 năm 1831, gần 200 thanh niên Cộng hòa đã họp để phản đối một đạo luật của chính phủ. Người ta nâng cốc chúc mừng cách mạng 1789. Trong bầu không khí căng thẳng. Galoa đứng dậy, một tay nâng cốc rượu, một tay cầm dao găm và hô to : « Mừng vua Lu-i Philip này !». Thái độ của Galoa được hoan nghênh nhiệt liệt và mọi người đổ ra đường biểu tình. Ngay sau đó Galoa bị bắt và bị giam tại nhà lao Xanh-Pêlaghi từ ngày 14 tháng 6 năm 1831 đến 16 tháng 3 năm 1832.

Chế độ hà khắc của nhà tù chỉ mới mấy tháng đã làm cho Galoa già đi nhiều (theo lời kể của người chị Galoa).

NHỮNG GIỜ PHÚT CUỐI CÙNG CỦA GALOA

Sau khi Galoa được thả, không ai biết thật rõ những sự việc gì đã xảy ra. Người ta chỉ đoán qua ba bức thư mà Galoa để lại. Trong « Thư gửi tất cả những người cách mạng » đề ngày 29-5-1832, Galoa viết : « Tôi mong rằng các bạn đừng trách tôi đã không chết vì Tổ Quốc... Tôi bị hai kẻ thù địch khiêu khích tôi đã nhận đấu kiếm với chúng, vì danh dự không cho phép tôi bàn trước điều đó với các bạn... Vĩnh biệt các bạn ! Tôi vẫn rất muốn sống vì lợi ích chung của chúng ta ».

Đó là những lời cuối cùng của Galoa. Biết mình sắp chết, Galoa đã thức suốt đêm để viết những công trình nghiên cứu của mình. Thỉnh thoảng Galoa lại ngừng lại và viết vội vàng, run run bên lề trang giấy: « Tôi không có thì giờ, không có thì giờ nữa... »

Những trang giấy mà Galoa viết lúc rạng đông, trong khoảng mấy giờ đồng hồ tuyệt vọng, đã đưa Galoa lên địa vị các nhà toán học lỗi lạc hàng đầu của thế giới. Ông đã giải quyết trọn vẹn vấn đề đã làm băn khoăn các nhà toán học trong hàng bao thế kỉ: « Trong những điều kiện nào thì một phương trình có thể giải được? » Trong công trình này ông đã vận dụng tài tình *lí thuyết nhóm* và vì thế ngày nay người ta xem Galoa như là người tiên phong trong lí thuyết đó, một lí thuyết đã chiếm một địa vị đặc biệt quan trọng trong toán học hiện đại và vật lí hiện đại.

Galoa đã giao công trình trên đây cho một người bạn thân là Sơvaliê cùng một số bản thảo nữa, nhờ ông này trình cho Viện Hàn lâm. Galoa viết: « Anh gửi hộ những công trình này cho Giacôbi hay Gauxơ và yêu cầu các ông ấy cho biết ý kiến — không phải là việc tôi làm đúng hay sai — mà về tầm quan trọng của nó đối với toán học ».

Mờ sáng 30-5-1832 Galoa gặp kẻ thù. Hai người dùng súng lục cách nhau chỉ vài mét, một viên đạn trúng vào bụng Galoa, ông ngã xuống. Một vài giờ sau, một người dân địa phương đi qua thấy vậy đã đưa ông vào bệnh viện Côsanh: Trong giây phút cuối cùng Galoa đã nói với người anh ruột mình: « Anh đừng khóc, em cần tỏ rõ lòng dũng cảm của mình để có thể chết vào tuổi hai mươi ».

Galoa đã từ chối linh mục đến cầu kinh và 10 giờ sáng ngày 31-5-1832 Galoa đã vĩnh biệt cõi đời. *Nhưng 60 trang giấy mà ông để lại trong đêm cuối cùng mãi mãi là một dài kỉ niệm bất tử của một thiên tài trẻ,* mà cuộc đời ngắn ngủi là một bản cáo trạng chế độ xã hội cũ đã vùi dập tài năng của con người.

GAUXƠ

Gauxơ

Chúng ta đã từng nghe câu chuyện về chú bé Gauxơ giỏi toán từ đầu cấp một, đã tìm ra ngay đáp số của bài tính tổng $1+2+3+\ldots+98+$ $+99+100$ khi thầy giáo vừa ra xong cho cả lớp.

Gauxơ, người được mệnh danh là « vua toán học » sinh ngày 30 tháng 4 năm 1777 tại Brausơvây nước Đức trong một gia đình người sửa ống nước kiêm nghề làm vườn. Năng khiếu toán học của ông bộc lộ rất rõ rệt ngay từ khi còn nhỏ.

Ông học trường Đại học Tổng hợp Gơttinhghen từ 1795 đến 1798 và bảo vệ luận án tiến sĩ toán năm 1799, trong đó lần đầu tiên ông đã chứng minh định lí cơ bản của đại số. Trước khi học xong đại học ông đã chuẩn bị tác phẩm « Nghiên cứu số học » (được in năm 1801) trong đó đã có những chứng minh rất thông minh và những phát minh rất sáng tạo.

Năm 1807 ông phụ trách khoa toán và thiên văn của trường Đại học Gơttinhghen và là Giám đốc đài thiên văn Gơttinhghen. Gauxơ là người đã kết hợp tài tình việc nghiên cứu toán học lí thuyết và toán học ứng dụng và đã có những ảnh hưởng rất to lớn trong sự phát triển đại số cao cấp, lí thuyết số, hình học vi phân, lí thuyết về sự hấp dẫn, lí thuyết về điện học và từ học, trắc địa học, thiên văn học.

KHẢ NĂNG KÌ LẠ VỀ TÍNH NHẨM

Từ nhỏ Gauxơ đã biểu hiện một khả năng kì lạ về tính nhẩm. Khi vừa học nói, chú bé luôn luôn đặt câu hỏi với những người xung quanh. Cầm cuốn sách trong tay bé hỏi mẹ cái gì đây, để làm gì. Khi được mẹ trả lời là chữ để đọc thì bé yêu cầu ngay mẹ dạy bé đọc. Bà mẹ đã dỗ con là phải đợi ít nữa mẹ sẽ dẫn vào trường để học chữ, học đọc, học viết.

Nhưng Gauxơ không chịu đợi. Bằng cách hỏi dần dần, chú bé học thuộc lòng những chữ cái và chẳng cần người lớn giúp, bé tự học đọc.

Người ta còn kể một câu chuyện khá lí thú. Bố Gauxơ thường nhận thầu công việc để cải thiện đời sống. Ông thường thanh toán tiền nong vào chiều thứ bảy. Một lần ông vừa đọc xong bảng thanh toán thì từ phía giường có tiếng của Gauxơ lên 3 tuổi :

— Bố tính sai rồi, phải như thế này mới đúng...

Mọi người mỉm cười còn chú bé thì nhíu mày suy nghĩ và sau đó nói kết quả là bao nhiêu. Mọi người xung quanh vẫn cười chế giễu, nhưng Gauxơ vẫn không chịu thua. Khi người bố tính lại từ đầu thì tất cả đều ngạc nhiên vì chú bé Gauxơ đúng. Những người láng giềng kháo nhau về việc này.

Chú bé mỗi ngày một lớn, dày dạn lên, chú đọc sách và tập suy nghĩ. Về sau, khi vừa mới trở thành sinh viên đại học, Gauxơ đã không hề sợ hãi lao vào những vấn đề chưa được giải quyết như một nhà toán học già dặn.

MẨU CHUYỆN VỀ CHÚ BÉ LÊN 7

Lên 7 tuổi Gauxơ đến trường. Thầy giáo Biutnhe luôn cầm trong tay chiếc roi ngựa để « nhảy múa » trên lưng những học sinh lười biếng, đôi khi nó cũng được tặng cho cả Gauxơ vì lúc đầu chú bé không có gì phân biệt với các học sinh khác.

Nhưng tình hình đã thay đổi hẳn khi bắt đầu học số học. Ngay từ giờ đầu tiên Gauxơ đã vượt hẳn lên, trước con mắt của người thầy giáo nghiêm khắc. Một lần thầy giáo cho tìm tổng của tất cả các số tự nhiên từ 1 đến 100. Khi thầy giáo vừa đọc và phân tích xong đầu bài thì đã nghe giọng Gauxơ: — Em giải xong rồi.

Thầy giáo dạo quanh các bàn, không hề để ý đến chú bé và nhắc : chắc em sai rồi đó, không thể giải nhanh bài toán khó này đâu

— Thưa thầy em giải rất đúng.

Thầy giáo đập đập chiếc roi một cách đe dọa : Nào thử xem có đúng không, nếu sai thì phải đòn đấy !

Nhưng thầy giáo hết sức ngạc nhiên khi kiểm tra thấy Gauxơ giải bài toán một cách hoàn toàn đúng mà cách giải lại hết sức độc đáo. Thầy bèn yêu cầu chú bé giải thích cho cả lớp nghe về cách giải độc đáo này.

Gauxơ đã trình bày : em nhận thấy ở dãy tính cộng này tổng của hai số của từng cặp số đứng cách đều phía đầu và phía cuối đều bằng nhau và em cộng từng cặp :

$$100 + 1, 99 + 2, 98 + 3, \ldots, 50 + 51$$

Mỗi tổng đều bằng 101, mà có 50 tổng như vậy nên kết quả là :

$$101 . 50 = 5050.$$

DỰNG ĐA GIÁC ĐỀU NỘI TIẾP TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Người cổ Hi Lạp có bài toán : chia đường tròn thành những phần bằng nhau, hay nói cách khác là dựng đa giác đều nội tiếp trong đường tròn. Họ đã tìm được công thức tính số cạnh của những đa giác ấy và cho rằng họ đã xét mọi khả năng, mọi trường hợp. Hàng trăm năm đã trôi qua và mọi nhà toán học đều công nhận là đúng.

Nhưng vào tháng 7 năm 1796, có một số « Báo văn học » được xuất bản ở Rên. Ít ai chú ý đến bài « Phát minh mới » dưới kí tên Gauxơ, sinh viên trường Đại học Tổng hợp Gơttinhghen ở Brausơvây. Chàng sinh viên 19 tuổi đã viết :

« Mọi nhà hình học đều biết rằng có thể dùng thước và compa để dựng các đa giác đều như tam giác đều, ngũ giác đều, đa giác đều 15 cạnh và các đa giác đều có số cạnh gấp đôi chúng. Điều đó người ta đã biết từ thời Ơclit và hình như từ ấy mọi người đều cho rằng lĩnh vực hình học sơ cấp không thể mở rộng thêm. Ít nhất là tôi chưa biết một sự thành công nào trong việc mở rộng về hướng này. Do đó tôi cho rằng đáng chú ý đến phát minh : ngoài những đa giác đều trên có thể bằng thước và compa dựng nhiều đa giác đều khác, ví dụ đa giác đều 17 cạnh. Phát minh đó thực ra chỉ là hệ quả của một lí thuyết lớn chưa được kết thúc hoàn toàn. Sau khi lí thuyết ấy được kết thúc nó sẽ được giới thiệu với bạn đọc ».

5 năm sau, người thanh niên 24 tuổi này đã cho xuất bản tác phẩm cơ sở « Những nghiên cứu số học » mà chương cuối bây giờ là lí thuyết hoàn chỉnh về chia đường tròn. Gauxơ rất tâm đắc với tác phẩm yêu quý nhất này của mình. Theo ý muốn của ông, trên tấm bia kỉ niệm ở ngôi mộ của nhà toán học vĩ đại này có khắc một *đa giác đều 17 cạnh* nội tiếp trong đường tròn.

Gauxơ đã tìm ra công thức $n = 2^{2^k} + 1$ với n là số nguyên tố để dựng được bằng thước và compa những đa giác đều n cạnh. Ông lại giải được phương trình $x^{17} - 1 = 0$, từ đó đưa ra cách dựng đa giác đều 17 cạnh bằng thước và compa. Đặc biệt những công trình này được trình bày khi mới 19 tuổi đời. Ông còn miệt mài tính toán và lập những bảng số nguyên tố, bảng các số thập phân suy từ dạng $\frac{1}{p}$ với $p = 1$ đến $p = 1000$.

GAUXƠ, NHÀ THIÊN VĂN BIỆT TÀI

Gauxơ có biệt tài về tính nhẩm và luôn chú ý cải tiến kĩ thuật tính toán. Nhờ đó ông đã phát hiện ra một hành tinh mới.

Trong đêm đầu năm 1801 nhà thiên văn người Italia Piaxi đã tìm thấy một hành tinh nhỏ giữa quỹ đạo của sao Hỏa và sao Mộc. Ông ta gọi hành tinh ấy là Xêrêra để kỉ niệm Nữ thần Nông nghiệp và No ấm. Các nhà thiên văn học say sưa theo dõi chuyển động của hành tinh này trong hệ thống mặt trời.

Sau đó ít lâu, Xêrêra tiến đến gần Mặt trời và bị những tia sáng chói chang của Mặt trời che lấp rồi biến mất, hình như các hành tinh lớn như sao Hỏa, sao Mộc đã đuổi nó đi mất.

Lúc bấy giờ Gauxơ bắt tay nghiên cứu vấn đề này qua tất cả tài liệu quan sát của Piaxi đối với hành tinh Xêrêra. Ông thấy rằng chỉ cần 3 lần quan sát chính xác là hoàn toàn có thể tính toán một quỹ đạo bất kì nào. Gauxơ đã tính đường đi của sao Xêrêra và chỉ cho các nhà thiên văn vị trí chính xác của nó. Hành tinh nhỏ bé này lại được tìm ra, khi các nhà thiên văn hướng ống kính vào đó.

Sau công trình thiên văn kiệt xuất này Gauxơ bắt đầu được xem như một nhà toán học vĩ đại của thế giới.

Về sau vào năm 1802, nhà thiên văn Đức Ônbec, bạn thân của Gauxơ, tìm thêm một hành tinh nhỏ nữa là Palađa. Ngày nay các thiên thể nhỏ này đã được tìm đến hàng nghìn. Theo sự tính toán của các nhà thiên văn trong hệ thống mặt trời có đến khoảng 50 000 thiên thể nhỏ như vậy. Quỹ đạo của sao Palađa cũng do Gauxơ tính ra theo phương pháp 3 lần quan sát.

Gauxơ đã hiến cho thiên văn học 20 năm trong đời mình. Đồng thời ông cũng giải quyết nhiều vấn đề toán học thuần túy nảy ra khi ông tính toán và nghiên cứu thiên văn.

GAUXƠ, NHÀ TRẮC ĐỊA HỌC

Gauxơ còn là nhà trắc địa học. Nhà vua ở Hanôvrơ cần có một bản đồ tỉ mỉ về đất đai của mình và giao cho ông lãnh đạo nhóm địa chất để làm việc này. Nhờ khả năng tư duy khoa học và trí thông minh tuyệt vời, Gauxơ đã tốn nhiều thời gian để đưa lại cho khoa học những thành quả kì diệu.

Ông đã sáng tạo ra môn « Trắc địa học cao cấp ». Ông đã xây dựng lí thuyết các bề mặt, vượt trước sự phát triển của toán học hàng trăm năm. Đồng thời ông lại sáng tạo ra nhiều phương pháp mà về sau được các nhà toán học ứng dụng rộng rãi.

Ông cũng đã xây dựng ngành điện tín điện tử, nghiên cứu hiện tượng nhiễm từ của Quả đất và đã xuất bản hai công trình quan trọng: « Lí thuyết thế năng » và « Lí thuyết tổng quát về nhiễm từ của Quả đất ». Ông nghiên cứu những vấn đề cơ bản của cơ học và sau đó đã xuất hiện « nguyên lí Gauxơ », hay như ông thường gọi « nguyên lí tác dụng tối thiểu ». Nguyên lí này minh họa một trong những quy luật cơ bản về sự chuyển động của hệ thống các vật thể.

Gauxơ cũng là người đề tâm nghiên cứu về hình học phi Ơclit và lí thuyết về hàm số eliptic.

MỘT THIÊN TÀI BẨM SINH

Gauxơ là biểu hiện của một thiên tài bẩm sinh. Như ông thường nói: « Tôi đã học tính trước khi học nói ». Suốt cả cuộc đời, ông đã sáng tạo không ngừng. Ông đưa mắt về đâu là phát hiện ở đấy những điều mà trước đó người ta không nhìn thấy. Khi chú ý đến vấn đề nào ông cũng luôn biết rút ra từ đó những kết luận mới mẻ và quan trọng. Người ta đã không lầm khi gọi Gauxơ, ngay cả hồi ông còn sống, là nhà toán học bậc nhất thế giới hay là *« vua toán học »*.

Ông mất ngày 23 tháng 2 năm 1855. (1777 – 1855)

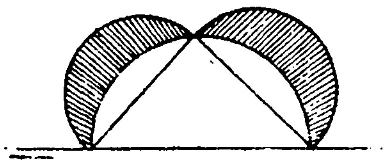
78

HIPÔCRAT

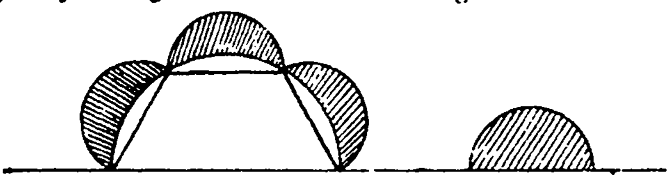
Nhà hình học cổ Hi Lạp Hipôcrat sống vào khoảng nửa sau thế kỉ thứ 5 trước công nguyên. Ông là tác giả của công trình có hệ thống đầu tiên về hình học mà sau này trở thành tư liệu cho bốn cuốn hình học phẳng của tập « Cơ bản » của Ơclit.

VẤN ĐỀ CẦU PHƯƠNG HÌNH VÀNH TRĂNG KHUYẾT

Vấn đề cầu phương hình tròn đã được các nhà toán học quan tâm từ cuối thế kỉ thứ năm và được nhanh chóng lan truyền. Bản thân Hipôcrat cũng đề cập đến. Ông đã xét một tam giác vuông cân và chứng minh rằng tổng diện tích của hai hình vành trăng khuyết tạo bởi ba nửa hình tròn có đường kính là cạnh huyền và hai cạnh góc vuông của tam giác bằng diện tích của tam giác vuông đó (H.18).

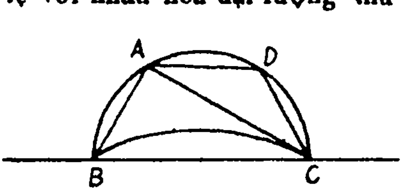

Hình 18

Đó là cách *cầu phương hai hình vành trăng khuyết* ứng với một trong ba vấn đề cầu phương mà Hipôcrat nghiên cứu. Vấn đề thứ hai là ông xét một hình thang cân với bốn nửa đường tròn như ở H.19 và đã chứng minh rằng tổng diện tích nửa hình tròn vẽ trên một cạnh của lục giác và ba hình vành trăng khuyết bằng diện tích của hình thang cân.


Hình 19

Như vậy nếu có thể cầu phương ba hình vành trăng khuyết thì cũng có thể cầu phương nửa hình tròn rồi hình tròn. Điều đó đã khiến Hipôcrat nghiên cứu cầu phương hình vành trăng khuyết.

Hipôcrat đã nêu ra *khái niệm về tỉ lệ*: bốn đại lượng tỉ lệ với nhau nếu đại lượng thứ nhất so với đại lượng thứ hai bằng đại lượng thứ ba so với đại lượng thứ tư. Nhưng Hipôcrat chỉ mới nói đến tỉ số hữu tỉ (do chưa biết đến tỉ số vô tỉ). Dựa vào H.20 Hipôcrat đã đưa ra một số mệnh đề như sau :



Hình 20

1. Bình phương cạnh AC của tam giác ADC đối diện với góc tù D lớn hơn tổng bình phương các cạnh kia.

2. Nếu bình phương một cạnh nhỏ hơn tổng bình phương hai cạnh kia thì góc đối diện là góc nhọn.

3. Nếu góc nội tiếp trong viên phân là nhọn thì viên phân đó lớn hơn nửa hình tròn.

Rõ ràng ông đã biết rất rõ khái niệm « cung chứa góc » và tất cả các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau, góc nội tiếp nhỏ chắn cung nhỏ.

Ngoài ra ông còn nêu lên *tính chất của lục giác đều*, chẳng hạn bình phương đường chéo lục giác đều gấp ba bình phương cạnh, hoặc cạnh lục giác đều nội tiếp bằng bán kính đường tròn.

Ông biết rất rõ *khái niệm về đồng dạng*, chẳng hạn ông đã viết : tỉ số diện tích hai hình đồng dạng bằng bình phương tỉ số hai đường tương ứng. Ông đã mở rộng định lí Pitago cho tam giác có góc tù và tam giác có ba góc nhọn.

Rõ ràng toán học ở giai đoạn Hipôcrat đã được phát triển và nhiều định lí đã được chứng minh chặt chẽ.

Cũng cần nêu thêm sự quan tâm của Hipôcrat đến vấn đề « *gấp đôi hình lập phương* », tức là bài toán cho trước một hình lập phương, hãy dựng một hình lập phương khác sao cho tỉ số thể tích của chúng bằng một tỉ số xác định, chẳng hạn 1 : 2.

Ông là người đầu tiên nêu lên nhận xét rằng bài toán giải được nếu giữa hai đoạn thẳng a và b có một tỉ số cho trước ta có được hai số tỉ lệ trung bình x và y mà

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \quad (*)$$

Nếu (*) được thỏa mãn thì tỉ số giữa a^3 và x^3 bằng tỉ số giữa a và b

HÊRÔNG

Nhà toán học cổ Hi Lạp Hêrông sinh vào khoảng năm 60 sau công nguyên. Ông là người chú trọng nhiều đến toán ứng dụng, nhất là hình học và cơ học ứng dụng. Trong các tác phẩm của ông, ông đã mô tả cách làm và cách sử dụng những dụng cụ đo đạc như đồng hồ nước, máy chạy bằng khí nén áp lực, máy tự động, thiết bị quân sự, máy nâng v.v. Ngoài ra ông còn viết thuyết minh về các tác phẩm của Ơclit và viết công trình về các định nghĩa.

CÔNG THỨC HÊRÔNG

Hêrông đã viết cuốn « Hình học » trình bày kiến thức cùng với bài tập và các ứng dụng thực tiễn một cách rõ ràng và dễ hiểu. Trước tiên ông trình bày mười ví dụ về tính diện tích hình vuông, rồi bốn ví dụ về diện tích hình chữ nhật, mười bốn ví dụ về bài toán thuộc tam giác vuông (xác định cạnh huyền và diện tích) v.v.

Ông đã nêu ra công thức tính diện tích của tam giác biết ba cạnh mà ta gọi là « *công thức Hêrông* ». Ông viết :

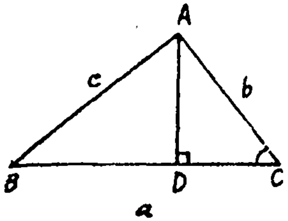
« Bạn có thể đo tam giác như sau. Giả sử tam giác có một cạnh dài 13 đơn vị độ dài, hai cạnh kia là 14 và 15. Muốn tìm diện tích của nó thì trước tiên cộng ba số 13, 14 và 15 được 42. Lấy một nửa tổng được 21, đem 21 trừ đi lần lượt ba cạnh, trước hết lấy 21 trừ đi 13 được 8, rồi lấy 21 trừ đi 14 được 7 và cuối cùng 21 trừ đi 15 được 6. Bây giờ nhân chúng với nhau : 21 nhân 8 được 168, nhân 168 với 7 được 1176, nhân 1176 với 6 được 7056. Từ đó lấy căn bậc hai của số 7056 được 84. Đó là diện tích tam giác ».

Ông đã chứng minh công thức

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2} \qquad (1)$$

bằng hai phương pháp :

Phương pháp thứ nhất. Dựa vào định lí Pitago : xét tam giác ABC có các cạnh a, b, c và góc C nhọn ta có (H.21).



Hình 21

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CD$$

do đó $CD = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

Xét ΔADC vuông ta có :

$AD^2 = b^2 - CD^2$, mà

dt $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}a.AD$.

Do đó :

$$S = \frac{1}{2}a^2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2}$$

hay
$$S = \sqrt{\frac{1}{4}a^2\left[b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2\right]} \qquad (2)$$

Nếu biến đổi công thức (2) bằng cách thay $s = \dfrac{a + b + c}{2}$ thì sẽ được công thức (1).

Phương pháp thứ hai. Trong ΔABC vẽ đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F là các tiếp điểm (H.22). Nối O với các điểm A, B, C, D, E, F ta có :

$BC.OD = 2dt\ \Delta BOC$

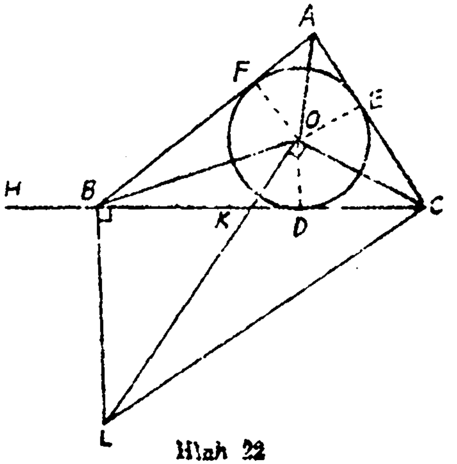
$CA.OE = 2dt\ \Delta AOC$

$AB.OF = 2dt\ \Delta AOB$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được $s.OD = S$, trong đó s là nửa chu vi và S là diện tích ΔABC.

Kéo dài CB lấy $BH = AF$. Từ $AE = AF$, $BF = BD$, $CE = CD$, suy ra :

$CH = s$, do đó $CH.OD = S$ hay $S^2 = CH^2.OD^2$.



Hình 22

Vẽ OL ⊥ OC cắt BC tại K, qua B dựng BL ⊥ BC cắt OL tại L. Do hai tam giác COL và CBL đều vuông nên bốn điểm C, O, B, L cùng nằm trên một đường tròn. Ta có :

$\widehat{COB} + \widehat{CLB} = 180^\circ$, mà $\widehat{COB} + \widehat{AOF} = 180^\circ$ (bằng nửa góc đầy ở tâm). Suy ra $\widehat{AOF} = \widehat{CLB}$.

Vậy $\Delta AOF \backsim \Delta CLB$ nên $\frac{BC}{BL} = \frac{AF}{FO} = \frac{BH}{OD}$;

$\Delta BKL \backsim \Delta DKO$ nên $\frac{CB}{BH} = \frac{BL}{OD} = \frac{BK}{DK}$

Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có :

$$\frac{CH}{HB} = \frac{BD}{DK}$$

Nhân các số hạng của tỉ số thứ nhất với CH, của tỉ số thứ hai với DC :

$$\frac{CH^2}{CH \cdot HB} = \frac{BD \cdot DC}{DK \cdot DC} = \frac{BD \cdot DC}{OD^2}, \text{ hay } \frac{CH^2}{CH \cdot HB} = \frac{BD \cdot DC}{OD^2}$$

Do đó :

$CH^2 \cdot OD^2 = CH \cdot HB \cdot BD \cdot DC = s(s-a)(s-b)(s-c)$

Nhưng $S^2 = CH^2 \cdot OD^2$, vậy $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Trước Hêrông, Acsimet cũng đã tìm ra công thức này dưới một dạng khác, nhưng chính Hêrông là người có công chứng minh nó và áp dụng rộng rãi trong việc giải các bài toán.

LAGRĂNG

(JOSEPH LOUIS LAGRANGE)

LAGRĂNG LÀ HÌNH CHÓP CAO CỦA KHOA HỌC TOÁN HỌC

Trong khi học môn giải tích ở phổ thông chúng ta đã từng làm quen với *định lí Lagrăng* sau đây :

«Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ có đạo hàm trong khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ »

Nhà toán học Lagrăng mang dòng máu Pháp và Italia. Nhà vua Pháp Napôlêông đã đánh giá Lagrăng như sau: «Lagrăng là hình chóp cao của khoa học toán học».

Ông nội Lagrăng là đại tá trong quân đội Pháp sống ở thành phố Tuyaranh nước Pháp. Bố ông là rể một gia đình thầy thuốc rất giàu và mẹ ông lại là con gái duy nhất của gia đình đó. Hai ông bà có đến 11 người con mà Lagrăng là con út, sinh ngày 25 tháng 1 năm 1736. Tuy bố giàu có nhưng tiêu pha hoang phí nên cuối cùng gia tài cũng chẳng còn gì. Lagrăng đã coi điều bất hạnh này là niềm vui sướng của đời ông: «Nếu tôi mà được hưởng gia tài của bố mẹ tôi thì chắc là tôi đã không quan tâm đến toán học».

Khi học phổ thông ông chưa ham thích toán, vì khi hiểu biết được công trình của Ơclit và Acsimet về hình học, ông tỏ ra hững hờ. Tình cờ một tài liệu của Halây, bạn thân của Niutơn, đến tay người học sinh trẻ này. Tài liệu đó đã ca ngợi cái ưu việt của phép tính vi tích phân so với những phương pháp tổng hợp của người Hi Lạp. Lagrăng đã bị thu hút bởi tài liệu. Chỉ trong một thời gian rất ngắn ông đã một mình nghiên cứu và tìm hiểu toàn bộ những gì mọi người đã biết về giải tích. Lúc 16 tuổi, ông đã được phong làm giáo sư toán của trường Pháo binh Hoàng gia của Tuyaranh: đây là sự bắt đầu của cuộc đời toán học lẫy lừng của ông.

Ngay từ đầu Lagrăng đã là một nhà giải tích, và không bao giờ trở thành một nhà hình học. Khuynh hướng này của ông thể hiện rõ rệt trong tác phẩm «*Cơ học giải tích*» mà toàn bộ cấu trúc đã được hình thành lúc ông 19 tuổi ở Tuyaranh, nhưng mãi đến năm 1788 khi ông đã 52 tuổi, tác phẩm này mới được xuất bản ở Pari. Trong lời tựa ông đã viết: «Trong tác phẩm này người ta sẽ không tìm thấy một hình vẽ nào cả».

Đó là cách viết nửa vui đùa của ông. Trong cuốn đó ông có viết: « cơ học có thể coi là hình học trong không gian bốn chiều, ba tọa độ Đêcac và một tọa độ thời gian đủ để xác định vị trí của một phần tử chuyển động vừa trong không gian vừa trong thời gian ». Đó chính là cách xem xét cơ học trở thành phổ thông từ năm 1915 khi Anhxtanh nêu lên trong thuyết tương đối tổng quát.

Ở Tuyaranh tất cả học trò của người giáo sư trẻ này lúc đầu đều là các anh của ông. Sau đó ông mới thành lập một hội nghiên cứu mà sau này trở thành Viện Hàn lâm khoa học Tuyaranh. Tập báo cáo đầu tiên của Viện ra mắt mọi người vào năm 1759 khi Lagrăng 23 tuổi.

Ông lại cho xuất bản công trình về cực đại và cực tiểu của phép tính biến phân. Như vậy mới 23 tuổi Lagrăng đã hoàn thành một công trình toán học nổi tiếng « *Cơ học giải tích* », đó là cơ học đại cương mà định luật vạn vật hấp dẫn của Niutơn là cơ học thiên thể. Mười năm sau, trong bức thư viết cho nhà toán học Đalămbe (171? — 1783) Lagrăng đã coi công trình « *phép tính biến phân* » hồi ông mới 19 tuổi là một đóng góp lớn vào toán học vì nhờ đó mà ông đã thống nhất môn cơ học. Nhà toán học Haminton đã đánh giá công trình này là « một loại thơ ca khoa học ».

Trong tập báo cáo của Viện Tuyaranh, Lagrăng đã tiến thêm một bước quan trọng trong việc áp dụng phép tính vi tích phân vào lí thuyết xác suất.

LAGRĂNG Ở BECLIN

Nhà bác học lớn Ơle luôn luôn đánh giá công trình của người khác một cách độ lượng. Khi nhà toán học trẻ Lagrăng 19 tuổi gửi cho Ơle những công trình đầu tay của mình, Ơle đã nhận ra ngay tài năng của Lagrăng và khuyến khích ông tiếp tục. Bốn năm sau khi Lagrăng gửi cho Ơle phương pháp giải quyết các bài toán đồng chu vi (đẳng chu) thì Ơle đã viết cho nhà toán học trẻ là phương pháp mới này đã giúp ông vượt qua được những khó khăn đã suýt bắt ông dừng lại khi ông đi vào phương pháp nửa hình học để giải quyết vấn đề bài toán đồng chu vi. Ơle chỉ công bố ngay kết quả của mình sau khi Lagrăng công bố phương pháp mới, vì Ơle không muốn «tước mất vinh quang thực sự của Lagrăng». Thật là một tấm gương khiêm tốn đầy cao cả của nhà bác học vĩ đại Ơle.

Ơle đã chủ động đặt vấn đề bầu Lagrăng lúc 23 tuổi làm viện sĩ nước ngoài của Viện Hàn lâm Beclin (ngày 2 tháng 10 năm 1759), đó là viện sĩ trẻ tuổi nhất. Lagrăng được mời sang làm việc tại Viện Hàn lâm Beclin.

Nhà toán học Đalămbe đã khuyến khích nâng đỡ Lagrăng rất nhiều. Ông đã viết thư khuyên Lagrăng bớt uống chè và uống cà phê, lại gửi cho Lagrăng một cuốn sách thuốc mới nhất về các chứng bệnh của những nhà thông thái. Thực ra Lagrăng quá say mê vào công việc nên đã phung phí sức khỏe của mình trong thời gian từ 16 đến 26 tuổi. Đến năm 45 tuổi, Lagrăng đã viết thư cho Đalămbe : «Tôi bắt đầu cảm thấy sức ỳ dần dần tăng và không biết khoảng 10 năm nữa tôi có còn làm toán được nữa không». Ông đã viết thư này trong lúc đang ốm đau và buồn bã. Trong lá thư cuối cùng mà Đalămbe (tháng 9 năm 1783) gửi trước khi mất một tháng, ông lại khuyên Lagrăng hãy lao vào công việc, vì đó là liều thuốc hiệu nghiệm để tránh ngã lòng vì bệnh tật : «Vĩnh biệt, có thể đây là lần cuối cùng. Hãy gửi lại vài kỉ niệm về con người quý mến bạn và tôn trọng bạn nhất».

Trong những vấn đề lớn mà Lagrăng đã đề cập trước khi nhận lời Đalămbe và Ơle đến Beclin, có vấn đề «*sự lắc của Mặt trăng*». Đây là một ví dụ của «bài toán về 3 vật thể» (trong trường hợp đặc biệt là Quả đất, Mặt trời và Mặt trăng) hút lẫn nhau theo định luật nghịch đảo của bình phương các khoảng cách giữa các trọng tâm của chúng. Do giải quyết được bài toán sự lắc của Mặt trăng, Lagrăng đã nhận được giải nhất của Viện Hàn lâm Khoa học Pari năm 1764 lúc ông vừa đúng 28 tuổi.

Trước thành tích rực rỡ này, Viện Hàn lâm Pari lại nêu ra một vấn đề khó hơn, và lần này Lagrăng lại được giải thưởng vào năm 1766. Đó là « bài toán về 6 vật thể » (hành tinh, Mặt trời và các vệ tinh của nó). Năm 1772, Lagrăng lại được giải thưởng của Viện Hàn lâm Pari về công trình bài toán về 3 vật thể. Đến các năm 1774 và 1778 ông lại đạt thành tích trong việc nghiên cứu chuyển động của Mặt trăng.

Ngày 6 tháng 11 năm 1766 Lagrăng lúc đó 30 tuổi đã được Vua Frêđêric đón tiếp nồng nhiệt tại Beclin. Nhà vua đã tuyên bố là được vinh dự có ở triều đình mình « nhà toán học lớn nhất ». Lagrăng được phong làm giám đốc Trung tâm toán-lý của Viện Hàn lâm Pari và trong suốt 20 năm đã không ngừng đóng góp nhiều công trình nghiên cứu cho Viện.

Năm 1767 Lagrăng viết công trình « *Về nghiệm của các phương trình số* ». Vấn đề ở đây là tìm nghiệm đại số của một phương trình có hệ số bằng chữ, chẳng hạn phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ hoặc $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ v.v. cho tới phương trình bậc cao hơn 3. Phải tìm ra những công thức cho nghiệm x theo các dữ kiện a, b, c,... Với một phương trình bậc n, ẩn số x có đúng n giá trị, ta đã biết ngày nay là phương trình bậc hai có hai nghiệm $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Tuy vấn đề này đã được giải quyết khoảng 20 năm sau khi Lagrăng mất, nhưng cái chìa khóa để mở đã có trong công trình của ông.

Công trình nghiên cứu của Largăng còn làm nảy sinh một sự kiện quan trọng khác. Với bậc 2, bậc 3 và bậc 4, phương trình đại số tổng quát giải được bằng một phương trình bậc thấp hơn bậc của phương trình đang xét. Nhưng đến phương trình bậc năm thì phương pháp trước đây được sử dụng với phương trình bậc hai, bậc ba hoặc bậc bốn không còn hiệu lực nữa.

LAGRĂNG TRỞ LẠI PARI

Sau khi vua Frêđêric mất (17 tháng 8 năm 1786) ở Beclin người ta bắt đầu không thích sự có mặt của các nhà khoa học tại Beclin. Lagrăng đành trở về Pari và được Vua Lu-i 16 trọng dụng, được bầu làm viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Pari, được nhà vua bố trí cho ở một căn phòng trong viện bảo tàng nổi tiếng Luyrơ.

Trong thời gian này, công việc quan trọng nhất của ông là tham gia cải tiến hệ đo lường. Chính ông đã có công nêu lên cần áp dụng cơ số 10 chứ không phải cơ số 12 đối với hệ đo lường, đó là hệ thập phân.

Lagrăng đã góp phần quan trọng trong công tác tổ chức nghiên cứu ở hai trường đại học lớn của nước Pháp là Trường Sư phạm cao cấp và Trường Đại học Bách khoa. Ông là giáo sư của hai trường về môn toán học sơ cấp và môn giải tích toán học. Giáo trình của ông được xuất bản làm hai tập «Lí thuyết về hàm giải tích» (1797) và «Các bài giảng về phép tính toán các hàm số» (1801—1806). Tác phẩm về toán học, thiên văn và cơ học của ông gồm 14 tập. Về lí thuyết số, ông đã dùng phân số liên tục để giải phương trình vô định bậc hai có hai ẩn. Về cơ học ông đã nêu hai dạng cơ bản của phương trình vi phân về chuyển động các hệ không tự do mà bây giờ ta gọi là *các phương trình Lagrăng cấp một và cấp hai.*

Ngày 10 tháng tư năm 1813, Lagrăng từ giã cõi đời vào lúc 66 tuổi.

LEBNIT

(WILGHEN LEIBNITZ)

Lebnit

Trong việc tính tích phân xác định nếu tính bằng định nghĩa thì đó là một công việc rất khó khăn và không phải lúc nào cũng thực hiện được. *Công thức Niutơn-Lebnit* sau đây là công thức rất quan trọng cho phép ta tính tích phân xác định của một hàm số liên tục nhờ nguyên hàm của hàm số đó:

«Nếu f(x) là một hàm số liên tục trên đoạn [a, b] thì:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

trong đó F(x) là một nguyên hàm nào đó của f(x)».

Câu phương ngôn «Nghề nào cũng biết, nhưng chẳng có khả năng cho một nghề» đã trở thành ngoại lệ đối với Lebnit (1646-1716).

Thiên tài của nhà toán học người Đức Lebnit thể hiện trong rất nhiều lĩnh vực: luật học, tôn giáo, chính trị, sử học, văn học, lôgic học, phép siêu hình, triết học. Ở lĩnh vực nào ông cũng tỏ ra xuất sắc.

Trong toán học Lebnit đã đi vào hai mũi nhọn: phép tính vi phân và giải tích tổ hợp. Phép tính vi phân là ngôn ngữ tự nhiên của cái liên tục, còn giải tích tổ hợp lại đi vào cái rời rạc. Giải tích tổ hợp đặt chúng ta đứng trước một mớ sự việc phân biệt mà mỗi cái đều có tính riêng biệt của nó và mời ta thành lập những mối liên hệ nếu có giữa các sự việc rời rạc đó.

Về việc này có thể cho rằng toán học với Lebnit đã đi trước hai thế kỉ so với thời đó. Một bộ óc uyên bác thâu tóm được hai lĩnh vực rộng lớn của tư tưởng toán học là cái liên tục và cái rời rạc, trước Lebnit không có ai làm được. *Trong lịch sử toán học ông là người duy nhất giải quyết được «cái giải tích» và «cái tổ hợp».* Ngày nay phương pháp tổ hợp của Lebnit đã được thực hiện trong lôgic tượng trưng và những phát triển của nó, trở thành vấn đề quan trọng trong môn giải tích.

Sự phát triển và những ứng dụng của phép tính vi tích phân đã thu hút các nhà toán học thế kỉ thứ 18, vì thế công trình của Lebnit đã không được coi trọng trước năm 1840.

Từ năm 1910 công trình của ông mới trở thành một trong những điểm lí thú nhất của toán học hiện đại.

Người ta đã cho rằng *«Lebnit không phải sống một đời người mà sống nhiều đời»*. Điều mà ông đã làm trong mỗi lĩnh vực: ngoại giao, lịch sử, triết học, toán học, cũng đủ cho một đời người.

Lebnit sinh ra ở Laidich ngày 1 tháng 7 năm 1646, trẻ hơn Niutơn 4 tuổi. Bố ông là giáo sư luân lí nhưng đã mất khi ông mới lên 6. Dù sao ông đã thừa hưởng ở người bố lòng say mê đối với môn lịch sử. Sau những buổi học ở trường Laidich, ông đã nghiên cứu thêm trong thư viện của bố mình.

Lúc 15 tuổi Lebnit vào trường Đại học Laidich để học luật và nhận thấy rằng muốn hiểu biết khoa học này phải nghiên cứu toán học. Vì thế mùa hè 1663 ông đã tới trường Đại học Iêna để theo các giáo trình toán học của Vaighen nổi tiếng ở địa phương đó. Năm 1666 ông sẵn sàng để bảo vệ luận án tiến sĩ luật học, nhưng người ta đã từ chối không cho ông bảo vệ lấy lí do ông còn trẻ quá! nhưng thực tế là luận án của ông tỏ rõ ông quá giỏi về luật so với kiến thức của các giáo sư dạy ông ở Trường Đại học Laidich.

Chán cái cảnh dìm người tài ở trường Đại học Laidich ông đã rời bỏ thành phố quê hương để đến Nurămbe ngày 4 tháng 11 năm 1666. Ở đó trường đại học chẳng những đã cấp bằng tiến sĩ luật cho ông mà còn mời ông giảng dạy luật tại trường. Điều trớ trêu là Lebnit đã gặp những con người luật pháp trước khi gặp những con người khoa học. Ông là con người hành động, luôn luôn đọc, viết, suy nghĩ. Ông đã viết các tác phẩm toán học và các tác phẩm thuộc các lĩnh vực khác phần lớn trên những chiếc xe cồ lồ do bò kéo ở châu Âu vào thế kỉ thứ 17 để đi thăm đây đó.

Chính Lebnit cũng đã phát minh một máy tính để thực hiện các phép nhân, chia, khai căn, tinh vi hơn máy tính của Patxcan chỉ làm được phép cộng và trừ. Ông cũng đã đưa ra vấn đề dãy số vô hạn. Một phát minh khác của ông là số π, tỉ số giữa chu vi đường tròn và đường kính của nó, có thể tính bằng tổng của dãy vô hạn:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Điều này nêu lên hệ thức đáng chú ý giữa π và tất cả những số lẻ.

Đầu năm 1673 ông sang Luân Đôn và đã trình bày chiếc máy tính của mình và một số phát minh khác trước « Hội Hoàng gia ». Ông đã được bầu làm hội viên nước ngoài của Hội Hoàng gia trước khi trở về Pari vào tháng 3/1673. Ông và Niutơn (1700) đã là những hội viên nước ngoài đầu tiên của Viện Hàn lâm khoa học Pari.

Năm 1700 ông đến Beclin làm gia sư và đã thành lập Viện Hàn lâm khoa học Beclin mà ông là Chủ tịch đầu tiên.

Người ta kể lại rằng: Lebnit vốn gầy và xấu trai, thường đeo bộ tóc giả màu đen. Một lần, khi ở Pari ông vào một hiệu sách để hỏi mua một tác phẩm triết. Người bán hàng nhìn ông từ đầu đến chân và hỏi: « Ông mua để làm gì? phải chăng ông đọc được sách này? » Lebnit chưa kịp trả lời thì ngẫu nhiên tác giả quyền sách ấy bước vào và lớn tiếng: « Kính chào Lebnit vĩ đại! ». Người bán sách vô cùng kinh ngạc, không ngờ rằng người đàn ông gầy và xấu trai này lại chính là người mà giới khoa học Pari đều rất khâm phục.

Ý thức tự học và say mê phát minh là hai điều đáng để mọi người học tập. Ông đã viết: « Có hai điều đem lại cho tôi lợi ích nhất. Thứ nhất là *tôi đã tự học mọi khoa học*. Thứ hai là *tôi luôn luôn lao vào tìm kiếm những điều mới mẻ* ngay lúc mới hiểu được những khái niệm đầu tiên của mỗi khoa học ».

Ông mất ngày 14 tháng 11 năm 1716 ở Hanôvrơ, thọ 70 tuổi.

LÔBASEPXKI

CUỘC ĐỜI ĐẦY BẤT HẠNH CỦA NHÀ TOÁN HỌC VĨ ĐẠI

Trong lịch sử toán học, trong lịch sử các khoa học chính xác và trong triết học, Lôbasepxki được xếp vào hàng ngũ những nhân tài lỗi lạc thế giới, bên cạnh Acsimet, Galilê, Côpecnic và Niutơn.


Lôbasepxki

Nhà bác học D. Menđêlêep, tác giả định luật tuần hoàn và bảng hệ thống tuần hoàn các nguyên tố hóa học mang tên ông đã viết: « Những tri thức hình học là cơ sở của các ngành khoa học chính xác và tính chất độc đáo của hình học Lôbasepxki đánh dấu sự phát triển độc lập của khoa học Nga. Mầm non của khoa học sẽ nảy nở và nhân dân sẽ thu hoạch kết quả của nó ».

Nhicôlai Ivanôvich Lôbasepxki sinh ngày mồng 1 tháng 12 năm 1792 ở Nigiơni Nôvơgôrôt. Bố ông là một công chức nhỏ, gia đình nghèo khổ và sống thiếu thốn. Nhờ ở bên ngoại có một đại úy tên là Sêbacsin giúp đỡ, nuôi các con của gia đình Lôbasepxki nên cả nhà đỡ lo lắng một thời gian. Năm 1797 ông Sêbacsin mất, gia đình càng gieo neo. Bà mẹ Lôbasepxki phải chuyển đến ở tại tỉnh Cadan để lo cho ba con trai ăn học tại trường Trung học Cadan năm 1802. Trường này chuyển thành trường đại học năm 1806.

Lôbasepxki vào trường đại học tháng 2 năm 1807 được hưởng học bổng của nhà nước cùng anh và em trai với điều kiện là về sau phải ở lại trong ngành giáo dục 6 năm. Thực tế Lôbasepxki đã gắn bó với Trường Đại học Cadan cho tới khi mất.

Lúc đầu theo ý muốn của mẹ, Lôbasepxki đã học y khoa. Sau đó khi có giáo sư Bacten là nhà toán học thuần túy uyên thâm tới giảng dạy thì Lôbasepxki đã bỏ ngành y để chuyển sang say mê học toán. Chỉ trong vòng hai ba năm ông đã tiếp thu được rất nhiều bộ môn khiến ai cũng phải ngạc nhiên. Ngoài toán học ra ông nắm rất vững vật lí và thiên văn đến nỗi sau khi tốt nghiệp một thời gian rất ngắn đã có thể dạy tốt hai môn đó.

Phải kể thêm một điều đặc biệt ở người thanh niên này, đó là *tư tưởng tiến bộ* do tiếng vọng của cuộc cách mạng Pháp và những trào lưu tiến bộ từ Tây Âu đến nước Nga dưới triều Vua Alècxăngđơ đệ nhất. Lôbasepxki bị tố giác là « cứng cổ, ngoan cố, có những triệu chứng vô thần », thường bị phạt do có tư tưởng chống đối. Sinh viên bị kiểm soát chặt chẽ và « dụ » của nhà vua chỉ thị cho các giám đốc các trường đại học đuổi những sinh viên phạm sai lầm nghiêm trọng và bắt họ sung quân làm lính. Lôbasepxki bị truy tố, nhưng nhờ các giáo sư có uy tín như Bacten nên người thanh niên đã được cứu thoát.

Lôbasepxki được giữ chức vụ trợ lí khi việc đó đã dịu đi. Nhưng lực lượng phản động lại hoạt động điên cuồng, 9 giáo sư bị cách chức và những người ngoại quốc phụ trách các khoa rời bỏ nước Nga. Khoa vật lí và toán học rơi vào một tình trạng bi đát. Hầu hết việc giảng dạy vật lí và toán học dồn về phần Lôbasepxki.

Manhitxki, một tên phản động được cử làm giám đốc học chính vùng Cadan và được ủy nhiệm lập lại trật tự ở trường đại học. Chế độ do Manhitxki thiết lập đè nặng lên trường đại học trong 7 năm. Trong suốt thời kì này đơn khiếu nại, đơn tố cáo gửi tới Pêtecbua và Bộ Giáo dục nhiều vô kể. Lòng phẫn uất chống lại Manhitxki ngày càng tăng. Vua Nicôla đệ nhất kế nghiệp Alècxăngđơ đệ nhất đã ra lệnh đuổi Manhitxki và đày đi Rơven.

Lôbasepxki được bầu làm giám đốc Trường Đại học Cadan năm 1827. Lúc đó ông mới 33 tuổi. Có thể đánh giá được lòng quý mến đối với ông trong cương vị giám đốc qua việc ông được bầu 6 lần liền tiếp giữ chức vụ này trong vòng 20 năm.

Ông đã có công lao to lớn đối với Trường Đại học Cadan, tập hợp lại các công trình khoa học trong tất cả các khoa, sáng lập ra tập san khoa học của trường. Đặc biệt năm 1830, bệnh thổ tả lan ra ở Cadan, ông đã thực hiện những biện pháp kiên quyết để cách li trường và góp phần quan trọng trong việc chống dịch ở thành phố.

Mười năm sau lại một thiên tai mới xảy ra. Một trận cháy bị gió bão bốc lên đốt cháy toàn bộ phần Đông Bắc thành phố và lan tới trường đại học, Lôbasepxki đã huy động sinh viên và cùng họ chiến đấu chống hỏa hoạn, cứu được những máy móc quan trọng nhất và cứu được thư viện quý của trường.

Điều mà mọi người đều nhận thấy nổi bật ở ông, đó là đức tính khoan hồng, sự lưu ý đối với những người gần ông và nhất là đối với những người quan tâm đến khoa học.

SỰ XUẤT HIỆN MỘT HÌNH HỌC MỚI: HÌNH HỌC PHI ƠCLIT

Hình học phát sinh từ phương Đông (Atxiri, Babilon — Ấn Độ) từ những thời kì cổ xưa, đã đáp ứng được những nhu cầu sơ đẳng của cuộc sống hàng ngày. Từ phương đông châu Á hình học đã vào Ai Cập và đã được ứng dụng để giải quyết những bài toán về đo đạc khi vạch ranh giới những đám đất và khi lập lại những ranh giới đó sau những trận lũ của sông Nin, khi xây dựng Kim tự tháp.

Trong những suy diễn của nó hình học phải đi từ những nguyên lí mở đầu. Tuy rằng có thể chứng minh mệnh đề này sau mệnh đề khác và suy diễn một cách lògic những mệnh đề đó từ những mệnh đề đơn giản hơn, nhưng vẫn có những mệnh đề đầu tiên làm cơ sở mà người ta công nhận. Đó là những tiên đề.

Đầu thế kỉ thứ ba ra đời tác phẩm « Cơ bản » (còn gọi là « Những nguyên lí ») của Ơclit gồm 13 tập, một tác phẩm kiệt xuất mà điểm nổi bật là sức mạnh về cách quan niệm lògic các vấn đề. Tác phẩm này được xuất bản lần đầu tiên bằng tiếng Hi-Lạp và tiếng latinh, rồi sau bằng các thứ tiếng khác.

Qua nhiều thế kỉ không ai dám cạnh tranh với Ơclit bằng cách xây dựng lại cơ sở của hình học, tuy vẫn có những lời phê phán về quan niệm chung của tác phẩm và một số lí luận riêng lẻ.

Người ta thường phê phán rằng Ơclit đã thay thế một số suy luận bằng trực giác, cho nên tác phẩm «Cơ bản» là một hỗn hợp lôgic và trực giác. Nhưng thực tế các nhà bình luận chú ý nhất đến tiên đề cuối cùng của bảng kê của Ơclit, đó là *tiên đề về đường thẳng song song* (tiên đề 5): «Từ một điểm ở ngoài một đường thẳng ta chỉ có thể kẻ một đường thẳng song song với đường thẳng đó».

Trong hình học nhiều mệnh đề có thể chứng minh được không cần đến tiên đề về đường thẳng song song, chẳng hạn: lí thuyết về góc (góc kề và góc đối đỉnh), trường hợp bằng nhau của tam giác, định lí về góc ngoài (góc ngoài lớn hơn một trong những góc trong không kề nó), so sánh cạnh và góc của một tam giác, tính chất đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm tới một đường thẳng, các định lí về dây cung và tiếp tuyến với một đường tròn, vị trí tương đối của các đường tròn và một số mệnh đề về hình học không gian. Đó là phần thứ nhất của nội dung hình học thường có tên gọi *hình học tuyệt đối*.

Phần thứ hai gắn liền với tiên đề 5 mà mọi mệnh đề nào thuộc loại này sẽ không thể chứng minh được nếu không dùng tiên đề 5. Phần thứ hai này thường được gọi là *hình học Ơclit chính thức*, cũng như tiên đề 5 còn được gọi là tiên đề Ơclit. Phần này gồm: định lí về tổng các góc của một tam giác, đoạn thẳng tỉ lệ, tam giác và đa giác đồng dạng, định lí Pitago và hệ quả, lí thuyết về diện tích và thể tích.

Trong lịch sử toán học, nhiều người đã cố gắng chứng minh tiên đề 5 như một định lí của các tiên đề khác trong hình học. Nhưng ngay cả những nhà toán học lớn cũng đã phạm sai lầm trong khi chứng minh hoặc đều cho rằng điều đó không thể nào thực hiện được. Liệu thực sự có phải tiên đề 5 không thể chứng minh được không? Nếu đúng như vậy thì nó không phụ thuộc các tiên đề khác, tức nó không phụ thuộc các cơ sở của phần hình học tuyệt đối.

Nhưng nếu không chứng minh được thì có thể công nhận trong mặt phẳng qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước sẽ tồn tại không phải chỉ một mà là hai, mười, một trăm hoặc nói chung là vô số đường thẳng không hề gặp đường thẳng cho trước ở đâu cả. Đó là giả thiết mà Lôbasepxki đã đặt ra.

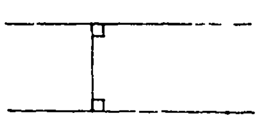
Sau khi thay tiên đề 5 của Ơclit bằng giả thiết của mình, Lôbasepxki đã tìm thấy một không gian mới không giống tí nào với không gian quen thuộc. Không gian Lôbasepxki này cũng bao hàm những dạng hình học khác nhau. Cho nên các mặt phẳng trong không gian mới này cũng phải theo các quy luật của môn hình học mới này và được gọi là *mặt phẳng Lôbasepxki*.

Không gian Lôbasepxki khổng lồ mà với bản năng và linh cảm thiên tài Lôbasepxki hình dung ra là một không gian vô cùng lớn đến nỗi hệ mặt trời mà cả thiên hà của chúng ta, giải ngân hà với vô số vì sao cũng đều trở nên nhỏ bé.

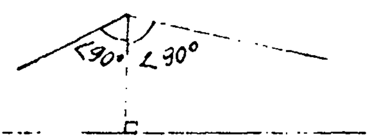
Ông đã phát biểu : « *Qua mỗi điểm trên mặt phẳng thuộc không gian mới có 2 đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước* ».

Sau khi thay thế tiên đề 5 bằng tiên đề của mình Lôbasepxki đã xây dựng *một môn hình học mới*, môn hình học về không gian do ông đưa ra, hoàn toàn không chứa đựng sự sai sót và mâu thuẫn nào.

Trong mặt phẳng Ơclit góc tạo bởi đường vuông góc và đường song song luôn luôn bằng 90° (H.23). Trong mặt phẳng Lôbasepxki góc tạo bởi đường vuông góc và một trong hai đường song song với một đường thẳng cho trước luôn luôn bé hơn 90° (H.24). Chẳng những thế, cái « góc song song » ấy (theo cách



Hình 23



Hình 24

gọi của ông) không phải là hằng số, mà phụ thuộc vào độ dài đường vuông góc hạ từ điểm đang xét đến đường thẳng ban đầu. Khi độ dài đường vuông góc giảm dần và tiến đến 0 thì góc song song sẽ tăng dần và tiến đến 90°, khi đường vuông góc tiến tới vô hạn thì góc đó sẽ dần tới 0. Nói cách khác:

— độ dài đường vuông góc bé thì góc song song sẽ lớn,

— độ dài đường vuông góc tăng thì góc song song sẽ giảm.

Trong nhà trường phổ thông, mọi cái đều đúng vì chúng ta đã quá quen thuộc với môn hình học Ơclit, môn hình học của cái không gian quen thuộc của chúng ta. Đó là khoảng vô tận chiếm cả vũ trụ và đồng nhất ở khắp mọi nơi. Dù ở nơi nào trong vũ trụ chúng ta đều có thể xây dựng những dạng hình học hoàn toàn giống nhau. Từ một hình nào đó chúng ta có thể cho nó lớn lên hoặc bé xuống theo một tỉ lệ nào đó, tức có thể xây dựng vô số hình đồng dạng. Góc xen giữa hai cạnh của một tam giác tí hon mà các cạnh chỉ bằng một phần mười milimét lại đúng bằng góc xen giữa hai cạnh tương ứng của một tam giác khổng lồ mà các cạnh dài hàng triệu kilômet. Rồi đến góc tạo bởi hai đường thẳng vuông góc hay nói cách khác góc tạo bởi một đường vuông góc và đường song song với một đường thẳng cho trước luôn luôn bằng 90°. Thế mà trong mặt phẳng Lôbasepxki mọi quan niệm như trên đều đảo lộn, không đơn giản, không tự nhiên, không dễ hiểu nữa!

Chính vì thế mà bao nhiêu nhà toán học không vượt được các chướng ngại vật này để cho Lôbasepxki dũng cảm nhảy vào một thế giới mới, với tầm nhìn vô cùng rộng lớn, nhìn xuyên vào chiều sâu của bản chất các hiện tượng.

SỰ SÁNG TẠO KHOA HỌC LỚN LAO VÀ TẤM BI KỊCH TRONG CUỘC ĐỜI LÔBASEPXKI

Ngày 23-2-1826, Lôbasepxki đã trình bày trước hội đồng bác học của Trường Đại học Tổng hợp Cadan công trình đầu tiên của mình « *Về các cơ sở của hình học* », giải đáp hoàn toàn cho bài toán mà suốt hai nghìn năm còn là một điều bí ẩn.

Đó là *« ngày sinh của hình học phi Ơclit »*, là ngày công bố bản thông báo đầu tiên trên thế giới về các nguyên lí của một ngành khoa học mới. Ông đã kiên nhẫn năm này qua năm khác, đặt từng viên gạch cho ngôi nhà mới và không ngừng sửa đổi các chi tiết của nó, tìm cho nó một hình dáng tuyệt mĩ. Từ công trình đầu tiên với lời lẽ tương đối phức tạp và khó hiểu, Lôbasepxki đã lao động không mệt mỏi để tìm những phương pháp trình bày trong sáng nhất, rõ ràng nhất để các định lí và những phương pháp chứng minh có sức thuyết phục nhất. Sau đó ba năm công trình đầu tay của ông được xuất bản năm 1829.

Nhưng tai hại thay, tác phẩm xuất sắc đó của tư tưởng toán học thiên tài không được những người duyệt xét nó tán thành. Những thính giả đầu tiên của Lôbasepxki đã cười mỉa mai. Thời đó chỉ có một người có uy tín hiểu được nó và đánh giá được nó. Đó là Gauxơ. Nhưng chính ông ta cũng chỉ biết những công trình nghiên cứu của nhà hình học vĩ đại 11 năm sau khi công trình đầu tiên của Lôbasepxki (năm 1840) in bằng tiếng Đức « Khảo cứu về lí luận đường song song » đến tay ông. Gauxơ đã đánh giá tác phẩm xuất sắc này một cách đúng mức qua các bức thư gửi cho các bạn Gheling và Sumase. Gauxơ đã tìm những công trình khác của Lôbasepxki, học cả tiếng Nga để nghiên cứu tác phẩm gốc. Nhưng điều đáng tiếc là Gauxơ không hề nói một tí gì trên báo chí và không ủng hộ công khai những ý kiến đó mà bản thân ông rất tán thành.

Do sợ « những con ong bầu vẽ bao vây đầu tôi nếu tôi công bố ý kiến của tôi » nên Gauxơ đã im hơi lặng tiếng, có thái độ không đúng đắn đối với các nhà toán học đang tìm ở ông sự giúp đỡ và sự ủng hộ. Thực tế Gauxơ đã làm chậm hàng chục năm sự công nhận môn hình học mới. Trong khi đó trên báo chí Nga và Đức có nhiều bài chế giễu những công trình của Lôbasepxki buộc ông phải chống lại những lời công kích của những kẻ không hiểu nổi ý kiến thiên tài của ông.

Sáng tạo ra một công trình khoa học lớn lao như vậy mà không gặp được một người nào hiểu và nhận thức giá trị to lớn của nó, lại luôn luôn phải đọc những bài báo của những người quyền thế với lời lẽ đầy nhạo báng mà không thể trả lời họ được (vì người ta từ chối không đăng những lời phản đối của ông), đó là một tấm bi kịch trong cuộc đời của Lôbasepxki.

TẦM TƯ DUY KHOA HỌC CỦA LÔBASEPXKI

Chúng ta hãy nghe lời phát biểu đanh thép và đầy tự tin của Lôbasepxki :

« *Không, môn hình học này không sai. Mặc dù nó phức tạp hơn hình học Ơclit nhưng nó rộng hơn hình học Ơclit rất nhiều : hình học Ơclit chỉ là một trường hợp riêng, trường hợp giới hạn của môn hình học mới này* ».

Thế giới hình học của ông là một không gian hoàn toàn đặc biệt, nó không giống tí nào với những thứ mà chúng ta đã biết. Ở trong thế giới mới Lôbasepxki này tồn tại những hình ảnh kì quái đến nỗi làm cho trực giác và nhận thức của chúng ta khó mà chấp nhận ngay được.

Chính Lôbasepxki đã từng nói : môn hình học của ông có thể chỉ áp dụng đối với những không gian khổng lồ và các khoảng cách cực kì lớn giữa các vì sao, đó là *môn hình học của vũ trụ*.

Ngày nay không cần phải bay vào vũ trụ mới có thể nhận thấy thế giới hình học của Lôbasepxki. Nhận thức và tầm tư duy khoa học của con người đã phát triển đến mức không phải rời khỏi hành tinh của mình chúng ta cũng có thể lĩnh hội được không phải những khái niệm này mà cả những khái niệm còn phức tạp hơn nhiều.

NHỮNG NĂM CUỐI ĐỜI ĐẦY HẦM HIU CỦA NHÀ HÌNH HỌC VĨ ĐẠI

Nói đến cuộc đời hoạt động của ông giám đốc Trường Đại học Cadan Lôbasepxki là nói về các công trình và những năm tháng hoạt động của nhà giáo dục Nga xuất sắc, một con người có tư tưởng dũng cảm và có bản lĩnh. Chính vì vậy về sau ông bị cách chức và chỉ được sử dụng làm người giúp việc cho giám đốc Sở giáo dục Cadan, một con người dốt nát.

Ông già đi trông thấy và bệnh mù, hậu quả của những lúc làm việc thâu đêm căng thẳng, bắt đầu phát triển. Việc rời khỏi trường đại học như mở đầu một chuỗi dài bất hạnh đối với ông. Alêcxây, người con cả có nhiều tài năng hứa hẹn sau khi bị cảm đã đau phổi và mất. Hình như số phận hẩm hiu đeo đuổi gia đình ông, cướp dần đi những đứa con tài giỏi lỗi lạc. Lôbasepxki đã chịu nhiều tổn thất lớn lao. Với cái điếu dài ngậm ở miệng, ông thường ngồi buồn rầu ủ rũ. Công việc liên miên, tinh thần căng thẳng và những đau thương mất mát đã thường xuyên dằn vặt ông.

Ông được bầu làm hội viên danh dự Trường Đại học Matxcơva, nhân dịp kỉ niệm 100 năm ngày thành lập trường. « Để công nhận những công lao của Ngài đối với nhà nước và đối với khoa học, trường Đại học Hoàng gia ở Matxcơva đã bầu Ngài làm hội viên danh dự với lòng tin tưởng sâu sắc rằng Ngài sẽ giúp đỡ tất cả những gì có thể góp phần vào việc phát triển của khoa học và của trường đại học » (trích thư của ông giám đốc trường).

Trước đó ông đã được bầu là hội viên danh dự của Trường Đại học Cadan. Nhưng những vinh dự đó không thể an ủi được đời ông sắp tàn. Đang bị đau ốm mù lòa và đứng trước ngưỡng cửa của cái chết, một lần nữa ông quyết định trình bày môn hình học mới của mình để lôi cuốn lần cuối cùng sự chú ý của các nhà toán học. Ông viết cuốn sách ấy bằng tiếng Pháp với tên sách là « *Hình học tổng quát* ». Cuốn sách này không phải do tự tay ông viết mà do ông đọc cho học trò viết vì ông bị mù.

Công việc của cả một đời vừa kết thúc thì ông cũng từ giã cuộc đời ngày 12-2-1856, đúng 30 năm sau ngày khai sinh môn hình học phi Ơclit.

MÊNÊLAUT

Nhà toán học Hi Lạp Mênêlaut (năm 98 sau công nguyên) đã có nhiều đóng góp về *lượng giác cầu*, trong đó ông đưa ra một loạt định lí về tam giác cầu.

Các định lí nổi tiếng của ông là các định lí về đường hoành.

Trước hết là định lí trong hình phẳng mà ta đã biết với tên gọi *« định lí Mênêlaut »*:

« Chứng minh rằng nếu P, Q, R lần lượt là giao điểm của các cạnh BC, CA, AB (hoặc các cạnh đó kéo dài) của tam giác ABC với một đường thẳng tùy ý thì:

$$\frac{BR \cdot AQ \cdot PC}{AR \cdot QC \cdot BP} = 1$$

Ông mở rộng định lí này trên hình cầu và đã tìm ra một số định lí khác trong lượng giác cầu.

NIUTƠN
(ISAAC NEWTON)

CÂU CHUYỆN VỀ QUẢ TÁO CỦA NIUTƠN


Niutơn

Câu chuyện nổi tiếng về quả táo của Niutơn quả là thú vị. Đây là câu chuyện có thực, không phải là chuyện thần thoại. Ông Staklây, người bạn của Niutơn đã kể lại như sau :

« Tại Luân Đôn, sau bữa ăn trưa thời tiết trở nên nóng nực. Chúng tôi rủ nhau ra vườn ngồi uống trà dưới bóng những cây táo và cũng chỉ có hai chúng tôi. Niutơn nói với tôi là chính lúc ấy ông đang nghĩ về định luật vạn vật hấp dẫn. Bỗng xuất hiện một quả táo rơi, Niutơn nghĩ thầm : tại sao quả táo lại rơi thẳng đứng mà không rơi lệch, tai sao lại luôn luôn rơi về tâm quả đất ? Như vậy *phải tồn tại một lực hấp dẫn trong vật chất, lực này phải tập trung ở tâm quả đất*. Nếu vật chất này lại hấp dẫn vật chất khác thì rõ ràng phải tồn tại một tỉ lệ tương ứng với khối lượng của chúng. Thế thì quả táo sẽ hấp dẫn Quả đất cũng như Quả đất sẽ hấp dẫn quả táo. Do đó phải tồn tại một lực tương tự như lực mà ta vẫn gọi là trọng lực. Lực đó trải khắp trong vũ trụ ».

Rõ ràng những suy nghĩ này về lực hấp dẫn xảy ra vào năm 1665 hoặc 1666. Trong giấy tờ lưu lại của Niutơn người ta tìm được những dòng chữ sau đây về những năm đó : «...Trong thời gian này tôi đang cảm thấy mình có nhiều khả năng phát minh qua những suy nghĩ thường xuyên về toán học cũng như triết học. Đúng là khả năng lúc này nhiều hơn bất cứ lúc nào khác về sau ».

Sự chứng kiến sự kiện lịch sử nói trên của Staklây rất ít người biết đến, vì mãi đến năm 1936 những hồi kí của Staklây mới được in.

Nhà văn Pháp nổi tiếng Vônte trong cuốn sách (xuất bản năm 1738) trình bày những tư tưởng của Niutơn đã trích dẫn câu chuyện trên và khẳng định đó là do cháu gái của Niutơn kể. Câu chuyện đó đã được phổ biến khắp nơi nhưng nhiều người vẫn tỏ ra nghi ngờ. Họ cho rằng đây chỉ là hư cấu, bịa đặt của Vônte. Thậm chí có những người nghe xong lấy làm bực tức, trong đó có nhà toán học lớn Gauxơ. Chính Gauxơ đã nói : « Câu chuyện về quả táo quá ư đơn giản. Táo có rơi hay không thì có gì là lạ, nhưng tôi không hiểu tại sao lại khẳng định rằng chuyện đó có thể thúc đẩy hay làm chậm điều phát minh của Niutơn.

Có lẽ sự việc như sau : một hôm có một tên ngu xuẩn và gàn dở đến hỏi Niutơn làm sao ông ta đi đến phát minh như vậy. Niutơn nhìn thấy nó, tỏ ra khó chịu muốn trả lời cho qua chuyện đã nói : do quả táo rơi ở mũi tao. Thế là đủ cho tên này yên tâm ».

Nhà sư phạm Nga Usinxki lại cho rằng câu chuyện quả táo này có một ý nghĩ sâu sắc. Ông đã viết về Niutơn như sau: Việc quả táo rơi từ trên cây xuống đất là hiện tượng rất bình thường. Nhưng chỉ có thiên tài của Niutơn mới nhìn thấy từ hiện tượng bình thường đó một phát minh khoa học vĩ đại. Việc đó đâu phải là ai cũng làm được.

Niutơn là một con người rất khiêm tốn. Khi hỏi cảm tưởng về những thành tựu khoa học của ông, ông đã trả lời:

« Về công việc của bản thân, *tôi tự thấy mình như một đứa trẻ chơi đùa trên bãi biển, vui sướng mỗi khi nhặt được một viên sỏi xinh hoặc một chiếc vỏ sò đẹp với hình dạng lạ thường, trong khi đại dương chân lí bí ẩn mênh mông nằm ngay trước mặt tôi»*.

Hỏi về thái độ và phong cách nghiên cứu ông nói: « Tôi thường xuyên chăm chú theo dõi đối tượng nghiên cứu của mình và kiên tâm chờ đợi, từ khi sự việc bắt đầu cho đến khi sự việc được sáng tỏ dần và trở thành hoàn toàn rõ ràng ».

TUỔI TRẺ CỦA NIUTƠN

Nói đến Idắc Niutơn chúng ta đều biết đến phát minh kì diệu trong vật lí, đó là *định luật vạn vật hấp dẫn* kể trên. Ông còn là người sáng lập môn cơ học thiên thể và cơ học trái đất, sáng lập môn Vật lí toán học.

Trong toán học, nhà bác học vĩ đại này đã có những cống hiến xuất sắc. Ông là người đầu tiên đã định nghĩa số là tỉ số của một đại lượng với đại lượng khác chọn làm đơn vị. Ông đã dùng kí hiệu a^n năm 1676 để chỉ một lũy-thừa bậc n và nêu lên nhị thức $(a+b)^n$ nổi tiếng được gọi là *nhị thức Niutơn*.

Niutơn sinh ngày 5-1-1643 là con một gia đình điền chủ ở Vunxtóc, miền nam nước Anh. Bố ông mất trước khi ông ra đời, mẹ đi bước nữa khi bé Niutơn mới lên ba. Do đó bà nội đã nuôi cháu trong cảnh nhà sa sút, quạnh hiu. Hoàn cảnh này đã ảnh hưởng đến tính tình của Niutơn, ông thích sống lặng lẽ, trầm ngâm và vì thế mà già trước tuổi.

Năm lên sáu, bà nội cho cháu vào học trường làng và đến năm cháu 12 tuổi thì bà gửi đến học nội trú ở một lớp tư của một người làm nghề bán thuốc tên là Klakơi ở thành phố Gren Hun.

Người ta kể lại rằng: năm đầu tiên ở lớp tư này, Niutơn chưa có biểu hiện gì về khả năng học toán, đến năm thứ hai lại kém toàn diện và hay bị bắt nạt. Một buổi ra chơi cậu bị một học sinh lớn học giỏi nhất lớp đánh cho ngất lịm. Vì yếu thế về sức khỏe và về học lực, Niutơn không dám đánh lại mà đã tìm ra một cách trả thù độc đáo: quyết tâm học thật giỏi để đứng đầu lớp, như thế là dịp tốt nhất để đè đầu cậu học sinh lớn tuổi nọ. Chỉ vài tháng sau, Niutơn đã đứng đầu lớp và từ đó bạn bè càng ngày càng mến phục.

Thành công này được duy trì hết lớp này đến lớp khác, ông luôn luôn đứng đầu lớp và rất giỏi về toán. Năm 1661 khi 18 tuổi ông đã thi vào học Trường Đại học Tổng hợp Cambrigiơ.

Ngay từ nhỏ ông đã học tiếng latinh, tiếng Hi Lạp, tiếng cổ Do Thái, tiếng Đức, tiếng Pháp. Vào những lúc rỗi rãi ông thích làm đồ chơi như làm cối xay, đồng hồ nước, đồng hồ mặt trời.

Thời gian ở Trường Đại học Cambrigiơ, các sinh viên được phân chia theo địa vị của cha mẹ thành nhiều loại. Loại cao cấp được học bổng cao và được quyền ăn cùng với các giáo sư. Loại cấp thấp không được học bổng và phải phục vụ cho các sinh viên giàu có và một số giáo sư. Niutơn thuộc loại sau.

Những năm tuổi trẻ của Niutơn trùng với những năm cách mạng tư sản Anh. Giai cấp tư sản non trẻ bắt đầu thành lập hạm đội và quân đội lớn mạnh. Nước Anh lúc đó đua tranh với nước Hà Lan về mặt đường biển cũng như về mặt khai thác đất đai. Việc giao thông trên mặt biển đòi hỏi về vận tốc mới của tàu bè, về những phương pháp xác định tọa độ ngoài biển khơi, v.v. Thực tế đó đặt cho khoa học nhiệm vụ phải giải quyết. Trong toán học phải có những phương pháp mới, phải có cách mạng trong khoa học mới tiến lên những bước quyết định được.

Cuộc cách mạng trong khoa học do nhà bác học Đêcac thực hiện một số năm trước khi Niutơn ra đời được đánh dấu bởi sự kiện Đêcac đưa vào trong toán học khái niệm về đại lượng biến đổi và hàm số. 15 năm sau khi Đêcac mất, Niutơn đã áp dụng khái niệm về đại lượng biến đổi và tương quan hàm số để lập nên cơ sở của một khoa học mới là *phép tính vi tích phân*, một bộ phận quan trọng của nền toán học hiện đại.

Cũng cần nhắc rằng, song song với Niutơn và hầu như độc lập với ông, nhà bác học Đức Lebnit đã đạt được những kết quả tương tự. Có thể nói cả hai nhà bác học này đã thành lập cơ sở của nền toán học hiện đại và Niutơn thì có cống hiến sớm hơn một ít.

Chương trình phổ thông không cho phép đề cập tới phép tính vi tích phân một cách tỉ mỉ. Tuy nhiên ta có thể xét một ví dụ cụ thể như sau:

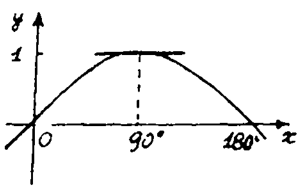
Cho một sợi dây dài 2p làm thế nào để gấp sợi dây đó thành hình chữ nhật mà diện tích lớn nhất. Nói cách khác, trong tất cả hình chữ nhật có chu vi 2p cho trước hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Muốn giải bài toán này ta phải dùng khái niệm đã biết về đại lượng không đổi và biến đổi, hàm số và đối số, biểu diễn tương quan hàm số bằng đồ thị. Giả sử các khái niệm đó đã được nắm vững ta hãy đi xa hơn.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x, chiều ngang là p—x, diện tích là y. Ta có:

$$y = x(p - x)$$

Cách giải bài toán này dựa vào phát minh rất quan trọng sau đây của nhà bác học Đức *Kêple*.



Hình 25

Ta xét đồ thị hàm số y=sinx (H.25) Với x = 90° thì y = 1. Ta hãy lấy hai giá trị góc: giá trị thứ nhất xấp xỉ nhỏ hơn 90° (chẳng hạn 89°30') và giá trị thứ hai xấp xỉ lớn hơn 90° (chẳng hạn 90°30'). Ứng với cả hai giá trị này của x hàm số y có giá trị nhỏ hơn khi $x = 90°$. Vậy với $x = 90°$ hàm số y đạt giá trị cực đại. Kêple đã nêu lên rằng với giá trị của x mà hàm số y có giá trị cực đại thì sự biến thiên của hàm số sát gần giá trị cực đại đó có một đặc điểm đáng chú ý. Cần nêu thêm rằng khi hàm số đạt giá trị cực đại đó thì nó biến thiên rất chậm xung quanh vị trí đó.

Thật thế, hãy chú ý đến đường sin ở trên. Giữa 0° và 90° thì đồ thị đi lên, giữa 90° và 180° thì đồ thị lại đi xuống và gần 90° thì từ lên dốc lại xuống dốc, hàm số thay đổi rất ít. Kêple đã xác lập rằng nếu với giá trị của đối số x mà hàm số y có giá trị cực đại và ta cho x một số gia rất nhỏ thì y hầu như không đổi (chẳng hạn, sin 90°00'01'' có thể coi bằng sin 90° tức là 1).

Gọi số gia của đối số là Δx thì $(x + \Delta x).(p - (x + \Delta x))$ hầu như bằng y, tức là $x(p - x)$.

Như vậy ta có thể viết phương trình gần đúng sau đây

$$x(p - x) = (x + \Delta x)(p - x - \Delta x)$$

Sau khi biến đổi ta được :

$$x(p - 2x - \Delta x) = 0$$

Giá trị Δx rất nhỏ nhưng không bằng 0 nên có thể bỏ nó đi và được :

$$p - 2x - \Delta x = 0 \text{ hay } p = 2x + \Delta x$$

Bây giờ giá trị Δx có thể lấy nhỏ bao nhiêu tùy ý, thực tế có thể bỏ qua, vậy :

$$p = 2x, \text{ từ đó } x = \frac{p}{2}$$

Chiều dài của hình chữ nhật phải tìm bằng nửa chu vi và chiều ngang bằng nửa kia. Vậy trong tất cả hình chữ nhật có chu vi cho trước thì hình có diện tích lớn nhất là hình vuông.

Trong gần 2 thế kỉ, phương pháp của Niutơn và Lebnit được chính xác hóa, mở rộng và phát triển. Bằng phép tính vi tích phân toán học đã góp phần giải quyết những vấn đề phức tạp của khoa học và kĩ thuật.

NIUTƠN VỚI VIỆC CẢI TIẾN TIỀN TỆ Ở NƯỚC ANH

Niutơn lãnh đạo Hội Khoa học Hoàng gia Anh (tương đương với Viện Hàn lâm Khoa học) trong 23 năm. Ông lại còn có công lớn trong việc *cải tiến tiền tệ ở nước Anh*. Đến cuối thế kỉ thứ 17 kĩ thuật về tiền tệ nước Anh còn chưa hoàn chỉnh, đồng tiền này nhẹ, đồng tiền kia nặng. Vì vậy phải cải tiến kĩ thuật đúc tiền và Niutơn đã thành công tốt đẹp trong vấn đề này.

Ông mất ngày 21-3-1727. Trên bức tượng ông dựng ở Trường Đại học Cambrigiơ người ta đã khắc câu sau đây:

«*Người vượt lên nhân loại bằng sức mạnh tư tưởng của mình*».

BÀI TOÁN VỀ BÒ ĂN CỎ

Niutơn đã đặt ra một bài toán về bò ăn cỏ như sau: «3 con bò trong hai tuần lễ ăn hết 2 hecta cỏ sẵn có và số cỏ mọc trên đó trong hai tuần lễ; 2 con bò trong bốn tuần lễ ăn hết 2 hecta cỏ sẵn có và số cỏ mọc trên đó trong bốn tuần lễ. Hỏi có mấy con bò trong 6 tuần lễ ăn hết 6 hecta cỏ sẵn có và số cỏ mọc trên đó trong 6 tuần lễ? (giả sử trước khi bò ăn, mọi cây cỏ đều cao bằng nhau, và sau khi bò ăn, tốc độ mọc của cỏ cũng bằng nhau)».

Đây là một bài toán không đơn giản. Giả sử x là số bò cần tìm, y là độ cao của cỏ trước khi bò ăn, z là độ cao của cỏ mọc trong mỗi tuần lễ.

Theo câu thứ nhất trong bài ra thì 3 con bò trong 2 tuần lễ ăn hết một số cỏ là $2(y + 2z)$, do đó mỗi con bò trong mỗi tuần ăn hết:

$$\frac{2(y+2z)}{3.2} = \frac{y+2z}{3}$$

Theo câu thứ hai trong bài ra thì số cỏ mà 2 con bò ăn hết trong 4 tuần lễ bằng $2(y + 4z)$, do đó mỗi con bò trong mỗi tuần ăn hết:

$$\frac{2(y+4z)}{2.4} = \frac{y+4z}{4}$$

Một cách tương tự, x con bò trong 6 tuần lễ ăn hết 6 hecta cỏ và số cỏ mọc trên đó trong 6 tuần lễ, tức là số cỏ ấy bằng $6(y + 6z)$, do đó mỗi con bò trong mỗi tuần ăn hết :

$$\frac{6(y + 6z)}{6x} = \frac{y + 6z}{x}$$

Bây giờ lấy những khối lượng cỏ mà 1 con bò ăn trong mỗi tuần làm tiêu chuẩn thì ta sẽ có hệ phương trình :

$$\frac{y + 2z}{3} = \frac{y + 4z}{4} = \frac{y + 6z}{x}$$

giải ra tìm được $x = 5$.

Vậy 5 con bò ăn hết 6 hecta cỏ có sẵn và số cỏ mọc trên đó trong 6 tuần lễ.

ƠCLIT

Vào cuối thế kỉ thứ 4 toàn bộ kiến thức toán học được học trong nhà trường Platông đều được tập hợp trong công trình của Ơclit mà như người ta sau này đánh giá : « đó là mẫu mực cho hàng nghìn năm ».

Tập « Cơ bản » của Ơclit đã trở thành một trong những thành tựu lớn nhất của nền văn hóa thế giới. Toàn bộ nhân loại đều đã học hình học theo tập « Cơ bản ». Hiện nay trong một số trường học của nước Anh người ta cũng dạy môn hình học theo bản dịch tập « Cơ bản » ra tiếng Anh có sửa chữa, và sách giáo khoa hình học phổ thông ở Anh gọi tên là « Ơclit ».

Thật vậy, Ơclit xứng đáng được nhận vinh quang đó nhờ tài năng sư phạm của mình. Ơclit là một người thầy vĩ đại nhất mà cả lịch sử toán học đều ghi nhận.

ƠCLIT NHÀ SƯ PHẠM LỖI LẠC

Chúng ta biết gì về cuộc đời của Ơclit? Ông dạy toán ở Alêcxăngđri, già hơn Acsimet (vì Acsimet mất năm 212 trước công nguyên).

Người ta kể lại *câu chuyện thú vị* sau đây : Một trong những học trò bắt đầu học môn hình học của Ơclit đã hỏi ông như sau : tôi có thể kiếm được gì nếu tôi học thuộc được tất cả sách của ngài. Ơclit đã gọi người hầu lại bảo : hãy cho anh ta 3 đồng vì anh ta muốn kiếm được tiền bằng học thuyết của ta.

Phải thừa nhận rằng Ơclit có khả năng bẩm sinh tuyệt vời về sư phạm. Một ví dụ rất rõ về nghệ thuật sư phạm đó là sắp xếp vấn đề lí thuyết về tỉ lệ rất khó vào quyển V của tập « Cơ bản », còn những vấn đề quan trọng khác thì trình bày trong 4 quyển đầu. Nhờ vậy mà những học sinh trung bình đều có thể nắm được 4 quyển đầu không sợ gặp phải những điều rất khó ngay từ đầu. Còn nhiều thí dụ tương tự chứng tỏ tài năng sư phạm của Ơclit.

Ơclit là người kế tục trường phái Platông. Thật thế, toàn bộ tác phẩm của ông đều phản ánh truyền thống của trường phái này. Platông đã nhấn mạnh là muốn nắm vững triết học phải nắm vững bốn môn khác là số học, hình học, lí thuyết hòa âm, thiên văn. Chính 4 khoa học này đều được Ơclit trình bày rõ ràng và sáng tạo trong các tác phẩm của mình. Hai môn số học và hình học đưa ra trong tập « *Cơ bản* », môn lí thuyết hòa âm trong tập « *Thiết diện cônic* » và trong tập « *Hiện tượng* » ông trình bày thiên văn theo quan điểm Platông như một học thuyết về mặt cầu xoay đều.

Như đã nói ở trên, tập « Cơ bản » là một tác phẩm tổng kết các công trình toán học của các nhà toán học trước đó. Vì vậy theo cách đánh giá của các nhà bác học thì « Ơclit là một nhà sư phạm lỗi lạc nhưng chưa phải đã là một thiên tài sáng tạo ». Tuy nhiên cũng phải thấy rằng Ơclit đã có công lớn trong việc sưu tầm, phân loại, sắp xếp, bổ sung những kiến thức toán học rải rác của các nhà toán học cổ Hi Lạp, cổ Ai Cập, Ba Tư, v.v. kể cả những kiến thức toán học để xây dựng Kim tự tháp Ai Cập từ 3000 năm trước công nguyên. Ông đã trở thành *nhà xây dựng và tổng hợp vĩ đại với tấm gương lao động cần cù, bền bỉ, thận trọng, trung thực.* Ông đã ngày đêm miệt mài viết trên những cuốn sách da cừu, sau này được in thành sách lưu truyền từ thế hệ này sang thế hệ khác. Cho tới nay tập « Cơ bản» đồ sộ đó của Ơclit «vững chắc và tuyệt đối hoàn chỉnh đến mức không thể có cuốn sách nào có thể so sánh được» và trong bao nhiêu thế kỉ đã là cuốn sách giáo khoa duy nhất về toán ở châu Âu và ở toàn thế giới.

TÁC PHẨM «VỀ NHỮNG ĐẠI LƯỢNG CHO TRƯỚC»

Tác phẩm «*Về những đại lượng cho trước*» có giá trị lớn đối với lịch sử đại số học. Tác phẩm này chứa những mệnh đề kiểu sau đây:

Nếu một số đại lượng được cho trước hoặc được xác định thì những đại lượng khác cũng sẽ được xác định. Chẳng hạn:

«*Mệnh đề 2*: Nếu đại lượng A và tỉ số A : B được xác định thì B cũng sẽ được xác định.

Mệnh đề 7: Nếu A + B và A : B được xác định thì A và B cũng sẽ được xác định».

Lại còn có những mệnh đề về đường thẳng cho trước bởi «vị trí», về tam giác cho trước bởi «hình dạng», chẳng hạn cho trước hai góc hoặc một góc và tỉ số hai cạnh kề. Rồi đến những mệnh đề về đa giác và diện tích của chúng, chẳng hạn: «Mệnh đề 55: Nếu diện tích được xác định theo hình dạng và theo độ lớn thì mỗi cạnh cũng sẽ được xác định theo độ lớn».

Các mệnh đề 84 và 85 nói rằng hai đoạn thẳng sẽ được xác định nếu hiệu và tích các độ dài của chúng hoặc tổng và tích các độ dài của chúng được xác định. Đó là loại toán:

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

Mệnh đề 86 đề cập tới hệ phương trình khó hơn dạng

$$\begin{cases} xy = b \\ y^2 = \alpha x^2 + C \end{cases} \qquad (+)$$

Loại toán (+) đã từng có trong các bài toán đại số thời Babilon. Cách giải khi đó là đem bình phương hai vế của phương trình thứ nhất, sẽ được tích và hiệu của y^2 và αx^2, điều này không giải quyết được với môn đại số hình học. Ơclit đã đạt được mục đích khi đưa vào ẩn số phụ z.

Xác định diện tích C theo y và z được C = yz (diện tích hình chữ nhật). Như vậy hệ (+) được thay thế bằng hệ 3 phương trình sau :

$$\begin{cases} xy = b \\ yz = c \\ y(y - z) = \alpha x^2 \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu suy ra tỉ số

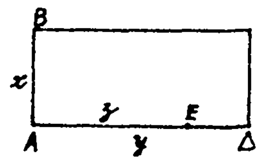
$$\frac{z}{x} = \frac{c}{b}$$

được xác định. Vậy tỉ số $z^2 : x^2$ cũng được xác định.

Nhưng dựa vào phương trình thứ ba thì $x^2 : y(y - z)$ cũng được xác định, $z^2 : y(y - z)$ và $z^2 : (4y(y - z) + z^2)$ cũng vậy, hay tỉ số $z^2 : (2y - z)^2$ được xác định.

Như thế các tỉ số $z . (2y - z)$; $z : 2y$; $z : y$ hoặc $z^2 : yz$ đều được xác định. Nhưng yz đã cho trước vậy cũng sẽ cho trước z^2, rồi z, v.v. Tất cả những điều này được phát biểu theo ngôn ngữ hình học, riêng Ơclit đã viết AΔ, AE và EΔ thay cho y, z và y − z (H.26).

Các Mệnh đề 88-95 nói về hình tròn. Chẳng hạn hai Mệnh đề 91 và 92 nói rằng : nếu từ một điểm A ở ngoài hoặc ở trong một hình tròn xác định mà ta kẻ một đường thẳng cắt hình tròn tại B và C thì hình chữ nhật AB.BC sẽ được xác định.



Hình 26

ƠCLIT VÀ TOÁN HỌC ỨNG DỤNG

Ơclit còn để lại một số tác phẩm như :

— Về những sai lầm trong toán học ;

— Về thiết diện cônic ;

— Quỹ tích trên bề mặt.

Ngoài ra về *toán ứng dụng*, ông đã viết :

— Nghiên cứu về phối cảnh ;

— Lí thuyết về biểu diễn qua gương ;

— Lí thuyết về âm nhạc ;

— Thiên văn sơ cấp.

ƠLE

(LÉONARD EULER)

Trong toán học phổ thông chúng ta biết khá nhiều về những cống hiến của Ơle, nào là : đường thẳng Ơle, đường tròn chín điểm của Ơle, công thức Ơle $d^2 = R^2 - 2Rr$ trong tam giác, hệ thức Ơle giữa số đỉnh, số mặt và số cạnh $đ + m = c + 2$ trong một khối đa diện. Ơle cũng đã đưa ra nhiều kí hiệu toán học được dùng đến ngày nay như số π, số i (căn bậc hai của -1), sin, cos, tg, số gia Δx, Σ (tổng), v.v.

TÀI NĂNG CÓ MỘT KHÔNG HAI CỦA ƠLE

Aragô đã nói như sau : « *Ơle tính toán không có gì khó khăn, như con người thở, như phượng hoàng bay lượn trong gió* ». Điều nhận xét này không có gì quá đáng vì thực tế Ơle có một tài năng đặc biệt về toán học. Ơle viết các công trình toán học của mình dễ dàng như một nhà văn có tài viết thư cho bạn thân của mình. Mặc dầu ông bị mù trong suốt 17 năm cuối đời nhưng việc nghiên cứu và cống hiến cho toán học không vì thế mà giảm sút. Trái lại sự mất mát khả năng nhìn đã giúp ông nhận thức rõ hơn thế giới bên trong trí tưởng tượng của mình.

Ngày nay người ta chưa biết đầy đủ tầm vóc của sự nghiệp toán học của Ơle, nhưng sơ bộ đánh giá nó vào khoảng 60 đến 90 bộ sách lớn, mỗi bộ khoảng 600 trang.

Ơle bước vào toán học đúng vào năm Niutơn mất. Khi đó hình giải tích được công bố năm 1637, đã được áp dụng 90 năm, phép tính vi tích phân đã được 50 năm, định luật vạn vật hấp dẫn của Niutơn, chìa khóa của ngành thiên văn vật lí, đã được 40 năm. Trong mỗi lĩnh vực này, người ta đã giải quyết được khá nhiều vấn đề riêng lẻ, nhưng chưa có ai dám bắt tay vào việc hệ thống hóa toàn bộ toán học thuần túy và ứng dụng trong giai đoạn này.

• Chỉ có Ơle với tài năng đặc biệt, với đầu óc vĩ đại, đã tỏ rõ *năng lực có một không hai trong cả hai lĩnh vực chủ yếu của toán học : cái « liên tục » và cái « rời rạc »*.

Ơle sống trong thế kỉ thứ 18 vào giai đoạn mà các trường đại học châu Âu không phải là những trung tâm chính về nghiên cứu. Toán học đã gắn với thời cổ để được trọng vọng. Chỉ có một số Viện Hàn lâm hoàng gia được một số vua tiến bộ quan tâm còn chú ý đến sự phát triển của khoa học. Beclin và Xanh-Pêtecbua là hai nơi đầu não của sự sáng tạo toán học và là chỗ dựa của Ơle. Viện Hàn lâm Beclin ngày càng giảm tác dụng trong suốt 40 năm và nhờ Vua Frêdêric Đại đế mà trở lại sức sống mới với sự có mặt của Ơle. Viện Hàn lâm Xanh Pêtecbua cũng vậy. Hai trung tâm này đã phát triển mạnh và có nguồn tài chính khá dồi dào để tiến hành nghiên cứu khoa học và trả tiền cho các nhà khoa học về lương và phụ cấp. Gia đình của Ơle có đến 18 người nhưng vẫn sống sung túc.

Ơle sinh ngày 15 tháng 4 năm 1707 tại Balơ (Thụy Sĩ). Bố Ơle cũng là một nhà toán học, học trò của Becnuli, nhưng ít quan tâm đến việc học toán của con. Khi Ơle vào Trường Đại học Balơ thì phải học môn thần học và tiếng Hêbrơ theo ý kiến của bố ông. Riêng Becnuli nhận ra năng khiếu về toán của Ơle đã bố trí dạy ông mỗi tuần một buổi. Và Ơle đã tích cực chuẩn bị để tiếp thu buổi dạy tuần sau. Năm 17 tuổi, ông nhận bằng giáo sư (1724) và bố ông lại có ý định buộc ông thôi dạy toán và nên đi dạy thần học. Becnuli đã thuyết phục ông bố là Ơle sẽ thành một nhà toán học lớn, đừng để đi vào thần học uổng tài năng.

Năm 19 tuổi, Ơle bắt đầu có công trình độc lập. Gia đình Becnuli đã tìm cách giới thiệu Ơle vào các Viện Hàn lâm, nhưng cuối cùng ông đã học y ở Balơ và nghiên cứu về môn sinh lí. Môn này đã giúp ông nghiên cứu toán học về âm thanh rồi về sự truyền sóng và ông không hề rời bỏ toán học.

ƠLE Ở NGA

Năm 1727 nhờ gia đình Becnuli giới thiệu, Ơle được tới Xanh Pêtecbua công tác ở khoa y của Viện Hàn lâm. Điều không may đã xảy đến, ngay hôm Ơle tới nước Nga thì Hoàng hậu Catêrin đệ nhất mất. Những người kế tục sau này đã coi Viện Hàn lâm là một vật trang trí vô ích và trong vài tháng đã có dự kiến đuổi những cộng tác viên nước ngoài về nước họ để bỏ Viện này đi. Trong lúc nhốn nháo này Ơle đã rời khoa y chuyển sang khoa toán.

Mọi việc trở lại bình thường qua cơn sóng gió đó. Ơle bắt đầu làm việc tích cực, suốt 6 năm lăn lộn với toán học vì ông ngại tham gia vào đời sống xã hội lúc bấy giờ đầy rẫy những tên tình báo.

Năm 1733, Ơle lúc đó 26 tuổi, đã bắt đầu giảng dạy toán ở Viện. Cảm thấy rằng mình có thể phải cột chặt ở Xanh Pêtecbua ông đã lấy con gái của một họa sĩ mà Pi-e Đại đế mang theo khi tới nước Nga.

Ơle thuộc về lớp những nhà toán học lớn có thể làm việc bất cứ ở đâu và trong bất cứ hoàn cảnh nào. Ông say sưa với đàn con (ông có đến 13 con mà 8 đã mất khi còn nhỏ), thường viết công trình toán với một con nhỏ ngồi trên đùi còn các con khác thì chơi xung quanh ông. Ông đã viết các tác phẩm toán học một cách dễ dàng mà ít ai có thể tưởng tượng nổi.

Tình hình Viện Hàn lâm Xanh Pêtecbua ngày càng tốt lên khi Anna Ivanôva cháu gái của Pie Đại đế lên ngôi năm 1730. Trong thời gian này một sự bất hạnh đã đến với Ơle. Viện Hàn lâm khoa học Pari đặt giải thưởng cho người nào giải được một bài toán về thiên văn. Các nhà toán học đã phải đề 3 tháng mới giải được, riêng Ơle chỉ giải quyết nó trong 3 ngày. Sự cố gắng phi thường này đã khiến ông bị bệnh và hỏng mất mắt phải.

CÂU CHUYỆN VỀ ƠLE VÀ ĐIĐƠRÔ

Có một câu chuyện lí thú về Ơle và nhà triết học Điđơrô. Được hoàng hậu Catơrin mời, Điđơrô đã tới nước Nga và đi truyền bá trong triều đình về chủ nghĩa vô thần. Được tin báo, Hoàng hậu Catơrin đã nhờ Ơle khóa miệng Điđơrô lại, công việc này quá dễ dàng đối với Ơle. Người ta kể lại rằng: «Điđơrô được báo tin là một nhà toán học tài giỏi có một chứng minh đại số về sự tồn tại của Thượng đế và sẽ trình bày trước triều đình nếu ông muốn nghe thì xin mời dự.

Điđơrô nhận lời vui vẻ. Ơle đã tiến thẳng tới Điđơrô và nói với một giọng đầy tin tưởng như sau: « Thưa ngài, $\frac{a + b^n}{n} = x$, vậy Thượng đế tồn tại, mời ngài trả lời». Điđơrô bối rối im lặng trong khi mọi người được một trận cười. Nhà triết học đành phải xin cáo từ Hoàng hậu Catơrin để trở về Pháp ».

Tất cả hoạt động của Ơle trong thời gian ở nước Nga không phải chỉ có toán học. Mỗi khi chính phủ nhờ ông vận dụng toán học để giải quyết những vấn đề không quá xa trong lĩnh vực này, ông vẫn nhận lời vui vẻ. Vì thế ông đã viết sách giáo khoa toán sơ cấp cho các trường học ở Nga, đã xem lại tổ chức cơ quan địa lí của Chính phủ, cộng tác về cải tổ hệ thống đo lường, tìm cách thực tiễn để thử lại các cân. Những việc này chỉ là một phần nhỏ trong toàn bộ hoạt động toán học của Ơle.

Một trong những công trình quan trọng của Ơle trong giai đoạn đó là tác phẩm về cơ học (1736), trong đó ông đã giải phóng những sợi dây ràng buộc về chứng minh tổng hợp và đã làm cho cơ học trở thành một khoa học phân tích. Lần đầu tiên sức mạnh của phép tính vi phân được áp dụng vào cơ học và một kỉ nguyên hiện đại của khoa học cơ bản này bắt đầu.

ƠLE Ở BECLIN

Sau khi Hoàng hậu Anna mất, Ơle đã nhận lời mời của Vua Frêđêric Đại đế đến làm việc ở Viện Hàn lâm Beclin. Ông đã sống ở Beclin trong 20 năm tiếp theo của cuộc đời ông. Trong thời gian này Vua Frêđêric đã sử dụng tài năng toán học của Ơle để giải quyết những vấn đề thực tiễn như đúc tiền, làm ống dẫn nước, đào kênh giao thông, v.v.

Nước Nga vẫn không bao giờ quên Ơle và đã trả cho ông tiền phụ cấp mặc dầu ông ở Beclin. Tuy gia đình đông người nhưng hoàn cảnh Ơle vẫn sung túc. Ngoài ngôi nhà ở Beclin ông còn có một trang trại ở Saclôttenbua. Khi quân Nga chiếm đóng Brăngđenbua năm 1760, trang trại của Ơle bị phá hoại. Viên tướng người Nga tuyên bố « không gây chiến với khoa học » đã đền bù thiệt hại cho Ơle vượt quá những thiệt hại thực tế. Hoàng hậu Elidabet, khi được tin về sự thiệt hại mà Ơle phải chịu, đã gửi cho ông một số tiền lớn bù thêm vào số tiền do viên tướng Nga đã đền bù cho ông.

Những công trình lớn về phép tính vi tích phân của Ơle xuất bản vào các năm 1748, 1755, 1768-1770 đã là nguồn nghiên cứu cho các thanh niên để trở thành những nhà toán học lớn trong khoảng ba phần tư thế kỉ. Nhưng tác phẩm lớn về *phép tính biến phân* đã chứng tỏ Ơle là một nhà toán học hàng đầu. Trong ngành cơ học giải tích Ơle đã nêu lên một loạt phương trình cơ bản về chuyển động các chất lỏng mà ngày nay được sử dụng trong thủy động học.

Ơle không chỉ là nhà toán học vĩ đại mà ông còn có kiến thức rộng về văn hóa và về tất cả các khoa học kể cả sinh vật học.

Một tác phẩm viết tại Beclin chứng tỏ rằng Ơle còn là một nhà văn có tài. Ông là tác giả của « *Những bức thư gửi cho một công chúa Đức* », trong đó ông đã trình bày những bài học về cơ học, quang hình học, thiên văn học, âm học, v.v. cho cháu gái của Vua Frêđêric là công chúa Anhan Đetxô. Những bức thư này được nhiều người biết đến và công bố bằng 7 thứ tiếng.

Đầu óc của Ơle vẫn minh mẫn cho tới khi chết. Ông mất ngày 18 tháng 9 năm 1783 thọ 77 tuổi. Buổi chiều hôm đó ông đang chơi với cháu và uống trà thì bất thần bị ngất. Cái điếu nhỏ rời khỏi ngón tay và ông kêu lên « Tôi chết ! ». Vào phút cuối cùng đó « *Ơle đã ngừng sống và ngừng tính toán* ».

ƠRATÔTXTEN

Khi học về số nguyên tố, chúng ta đều biết đến cái « *sàng Ơratôtxten* ». Đó là một phát minh nổi tiếng của ông trong lí thuyết số. Muốn thành lập bảng số nguyên tố từ 1 đến 100 chẳng hạn thì viết các số tự nhiên từ 1 đến 100, rồi gạch tất cả các số không nguyên tố : các bội số của 2, của 3, của 5, của 7. Những số còn lại không bị gạch là số nguyên tố.

Ông sống khoảng năm 276-194 trước công nguyên ở cổ Hi Lạp, và là bạn của Acsimet.

NHÀ BÁC HỌC NỔI TIẾNG Ở NHIỀU LĨNH VỰC

Ông là một nhà bác học say sưa lao động, hết lòng vì sự nghiệp khoa học, nhưng chưa phải là thiên tài như Acsimet. Bạn bè gọi ông là « bêta » tức nhân vật số hai, ngoài ra người ta cũng gọi ông là « pentalôs » tức là « nhà 5 môn điền kinh », coi ông là một « nhà thể thao » toàn tài đạt nhiều kết quả tuyệt vời trong nhiều lĩnh vực khác nhau, nhưng chưa bao giờ trở thành nhà vô địch ở một môn nào.

Ông rất nổi tiếng ở nhiều lĩnh vực như toán học, địa lí, lịch sử, triết học và thơ ca. Đặc biệt ông đã làm thơ rất tinh tế về nhân đôi hình lập phương, làm thơ kể về các vì sao trên bầu trời dưới dạng câu chuyện phiêu lưu trong vũ trụ. Ông thường sưu tầm các huyền thoại về các chòm sao. Ông còn tính toàn độ nghiêng của đường hoàng đạo, khoảng cách từ Mặt đất đến Mặt trời và Mặt trăng, chu vi Quả đất. Ông đã lập bản đồ thế giới mới dựa trên giả thuyết Quả đất hình cầu và viết những công trình nghiên cứu rất sâu về hài hước cổ Hi Lạp.

Ông là *người sáng lập về niên đại*, tức cách xác định chính xác ngày tháng của các sự kiện lịch sử.

Khoảng năm 260 trước công nguyên, Ơratôtxten đã rời quê hương trên bờ sông châu Phi để tới thủ đô Aten của Hi Lạp tiếp tục việc nghiên cứu. Theo ông kể lại thì ông đã tới Aten rất đúng lúc, đúng thời cơ vì lúc đó ở Aten đang có mặt nhiều vĩ nhân của triết học, đó là thời đại phát triển của nhiều trường phái triết học.

Tiếc thay, vào cuối đời ông đã trở nên mù quáng, mê muội đến nỗi tự tử!

Hãy nói về tác phẩm niên đại của ông. Ông là người rất cẩn thận trong vấn đề này. Nguyên tắc của ông đề ra là đừng dùng đến huyền thoại mà không thể kiểm tra được, phải ghi chú ngày tháng trên tài liệu gốc, nguyên bản, chẳng hạn danh sách những người thắng cuộc trong các kì thi Ôlempic. Ngoài ra phải đánh giá một cách khách quan thời gian xảy ra sự kiện.

Tác phẩm của ông về *đo lường Quả đất* được viết rất thận trọng. Những đánh giá cổ xưa mà Acsimet nhắc tới xuất phát từ quan niệm là khoảng cách từ một nơi này đến một nơi khác ở Ai Cập bằng 20 000 đơn vị dài « stadi » được ông nghiên cứu lại. Do khoảng cách này thực tế đo được cả trên bộ và cả trên biển nên khó mà kiểm tra. Vì thế ông đã lấy một khoảng cách nhỏ hơn để có thể đo chính xác, cụ thể từ thành phố Alêcxăngđri đến thành phố Xiêna ở Ai Cập và đã kết luận khoảng cách bằng 5 000 đơn vị dài « stadi ».

Sau đó ông đã phát hiện được là trong mùa hè, Mặt trời ở thành phố Xiêna đứng ở thiên đỉnh còn ở thành phố Alêcxăngđri thì nó lệch khỏi thiên đỉnh khoảng $\frac{1}{50}$ của 4 vuông (tức 360^0), từ đó ông suy ra chu vi của Quả đất bằng $50.5000 = 250\,000$ đơn vị dài « stadi ». Ta không biết chính xác đơn vị dài « stađi » bằng bao nhiêu mét, nhưng rõ ràng cách làm của Ơratôtxten tỏ ra thận trọng.

MƯỜI LOẠI SỐ TRUNG BÌNH

Có mười số trung bình sau đây:

1) $A - B = B - C$ hay $A + C = 2B$, đó là số trung bình cộng;

2) $A : B = B : C$ hay $AC = B^2$, đó là số trung bình nhân;

3) $\dfrac{A - B}{B - C} = \dfrac{A}{C}$, đó là số trung bình điều hòa;

4) $\dfrac{A - B}{B - C} = \dfrac{C}{A}$ — số trung bình điều hòa nghịch đảo;

5) $\dfrac{A - B}{B - C} = \dfrac{C}{B}$ — số trung bình thứ năm;

6) $\dfrac{A - B}{B - C} = \dfrac{B}{A}$ — số trung bình thứ sáu;

7) $\dfrac{A - C}{A - B} = \dfrac{B}{C}$ hay $A = B + C$ — số trung bình thứ bảy;

8) $\dfrac{A - C}{A - B} = \dfrac{A}{B}$ — số trung bình thứ tám;

9) $\dfrac{A - C}{A - B} = \dfrac{A}{C}$ — số trung bình thứ chín;

10) $\dfrac{A - C}{B - C} = \dfrac{B}{C}$ — số trung bình thứ mười.

Ba số trung bình đầu tiên là do trường phái Pitago tìm ra, ba số trung bình tiếp theo là do Ê-vđôc tìm ra, còn bốn số cuối cùng là do Ơratôtxten tìm ra.

Papi, nhà toán học cổ Hi Lạp, đã viết:

« Bây giờ ta phải chứng minh làm thế nào từ số trung bình nhân có được 10 số trung bình trên. Ta bắt đầu bằng định lí sau:

Mệnh đề 17. Giả sử A, B, C là ba số hạng tỉ lệ và giả sử

$D = A + 2B + C$

$E = B + C$

$F = C$

ta sẽ được ba số hạng của tỉ lệ thức là D, E, F. « Papi đã dùng ba ví dụ để chứng minh rằng tất cả tỉ lệ thức ba số hạng (A, B, C) đều suy ra được từ đẳng thức (1, 1, 1) bằng cách áp dụng mệnh đề 17.

Thật thế, từ tỉ lệ thức ba số hạng (1, 1, 1) và áp dụng mệnh đề 17 ta lần lượt được :

4, 2, 1 rồi 9, 3, 1, v.v.

sau đó theo thứ tự ngược lại : 1, 2, 4, v.v. và lại vận dụng mệnh đề 17 sẽ được 9, 6, 4, v.v.

Cứ thế theo quá trình ngược lại ta có thể từ mỗi tỉ lệ thức với ba số hạng nguyên dẫn tới đẳng thức (1, 1, 1).

Một ví dụ khác :

« *Mệnh đề 20.* Nếu A, B, C tỉ lệ với nhau thì

$D = 2A + 2B + C$

$E = 2B + C$

$G = B + C$

sẽ cho ta số trung bình điều hòa ».

Chính Ơratôtxten đã trình bày những vấn đề này với một vài hệ quả có tính triết học. Ông đã chứng tỏ rằng tất cả những phương trình trên bằng cách thay thế tuyến tính đều có thể dẫn tới dạng $B^2 = AC$ hay $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$.

PATXCAN

(BLAISE PASCAL)

TUỔI TRẺ CỦA PATXCAN VÀ SỰ GIÚP ĐỠ CỦA HAI NGƯỜI CHỊ THÂN YÊU

Patxcan

Patxcan sinh ngày 19 tháng 6 năm 1623 tại tỉnh Clecmông Feráng nước Pháp. Ông mồ côi mẹ từ lúc 4 tuổi và có hai chị vừa xinh đẹp vừa có trình độ đã có ảnh hưởng quan trọng đến cuộc đời của ông.

Tác phẩm toán học của ông đánh dấu sự *sáng lập ra lí thuyết toán về xác suất.* Năm lên 7 tuổi, Patxcan theo bố và các chị lên Pari ở. Chính vào lúc này, bố Patxcan bắt đầu dạy con học. Cậu bé có thân hình yếu đuối bên cạnh bộ óc sáng suốt. Ban đầu việc học tiến hành trôi chảy, người bố rất ngạc nhiên trước sự tiếp thu nhanh nhạy của con trai mình. Để bảo vệ sức khỏe cho con, ông bố đã cấm con học toán vì sợ toán học sẽ làm con mệt óc. Bố Patxcan là một người huấn luyện giỏi nhưng lại là một nhà tâm lí kém : sự cấm đoán về học toán đã khiến cậu bé tăng thêm trí tò mò. Một hôm (lúc 12 tuổi), Patxcan hỏi bố hình học là cái gì. Bố đã mô tả cho con một cách rõ ràng và Patxcan đã nhảy lên vì vui sướng.

Những bước đầu của ông về học hình học đã trở thành một ví dụ đặc biệt có tính chất thần thoại về năng khiếu quá sớm đối với hình học. Thành tích đầu tiên của Patxcan là tự mình, không có sách vở nào cả, chứng minh rằng tổng các góc của một tam giác bằng hai vuông. Từ đó ông say sưa nghiên cứu và đã bước rất nhanh trên con đường này.

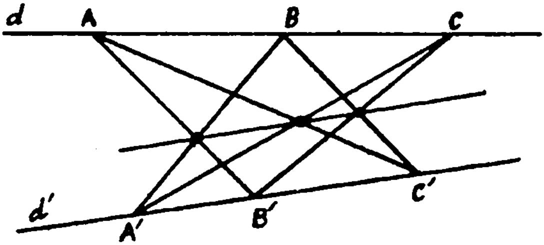
Bố ông vô cùng sung sướng thấy con mình có thể trở thành một nhà toán học, vội đưa cho con cuốn «Cơ bản» của Ơclit. Patxcan đã vồ lấy cuốn sách này và đọc như đọc truyện. Cậu bé đã bỏ các trò chơi để lao vào hình học. Cô chị Gilbectơ đã kể lại là em mình đã tự tìm ra 32 mệnh đề đầu tiên của Ơclit và theo đúng thứ tự như Ơclit đã sắp xếp, trong đó mệnh đề thứ 32 chính là chứng minh tổng các góc của một tam giác bằng hai vuông như đã nói ở trên. Năm 14 tuổi, Patxcan đã được tham gia những buổi tranh luận khoa học tổ chức hàng tuần do Macxen điều khiển, về sau tổ chức này trở thành Viện Hàn lâm khoa học Pháp.

Một sự việc không hay xảy ra : bố Patxcan do thật thà và thẳng tính đã làm phật lòng Hồng y giáo chủ Risơliơ và gia đình đã phải hồi hộp chờ đợi sự trừng phạt của Risơliơ. May thay có chị Jắccơlin xinh đẹp và thông minh đã cứu cả gia đình bằng một bản nhạc biểu diễn tình cờ để Risơliơ giải trí. Khi ông này biết tên nữ nghệ sĩ trẻ tuổi đã tha thứ cho bố Patxcan và đã bố trí công việc cho ông tại Ruăng. Chính ở thành phố này mà Patxcan đã gặp và kết bạn với nhà viết văn và viết kịch Pháp nổi tiếng Cócnây. Patxcan là nhà toán học, còn Cócnây không hề ngờ rằng người bạn thân của mình trở thành một trong những người sáng tạo về văn chương Pháp.

ĐỊNH LÍ LỚN PATXCAN

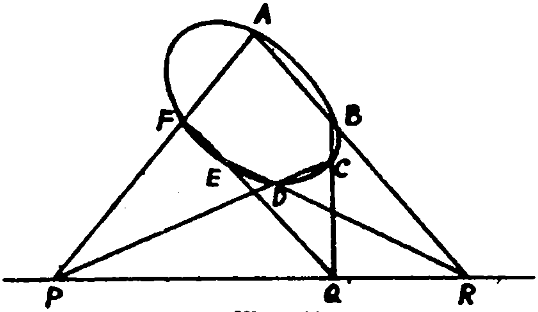
Trong suốt thời gian này, Patxcan đã làm việc không ngừng; trước năm 16 tuổi ông đã chứng minh được một trong những định lí đẹp nhất của hình học sau này được đặt tên là *«định lí lớn Patxcan»*. Ta có thể phát biểu dưới một dạng đặc biệt định lí tổng quát này và ta có thể «dựng» lại chỉ bằng cái thước.

Ta kẻ hai đường thẳng d và d' không song song. Trên d lấy ba điểm phân biệt A, B, C và trên d' lấy ba điểm phân biệt A', B', C'. Nối các điểm này bằng những đường thẳng chéo : AB', A'B, BC', B'C, CA', C'A. Hai đường thẳng của mỗi cặp cắt nhau tại một điểm. Ta được ba điểm mới. Trường hợp đặc biệt của định lí Patxcan nói ở đây là ba điểm này thẳng hàng (H.27).



Hình 27

Bây giờ xét một thiết diện cônic, chẳng hạn elíp, trên elip ta lấy 6 điểm A, B, C, D, E, F và nối chúng từng đôi, theo thứ tự đó, bằng những đường thẳng. Ta được một lục giác nội tiếp trong elip mà AB và DE, BC và EF, CD và FA là những cặp cạnh đối (H.28). Hai đường trong ba cặp đó cắt nhau tại một điểm và ba giao điểm P, Q, R này nằm trên một đường thẳng. Đó là *định lí Patxcan*. Có thể Patxcan lúc đầu đã chứng minh điều này đúng với đường tròn rồi mới chuyển sang elip.



Hình 28

Điều ngạc nhiên nhất là cậu bé 16 tuổi này đã viết một công trình về cônic với 400 mệnh đề về thiết diện cônic. Tiếc rằng công trình đầy đủ đã bị thất lạc. Chỉ có Lebnit đã đọc một bản và phát biểu rằng : hình học của Patxcan hoàn toàn khác với hình học cổ Hi Lạp, nó không phải là hình học métric mà là hình học chiếu.

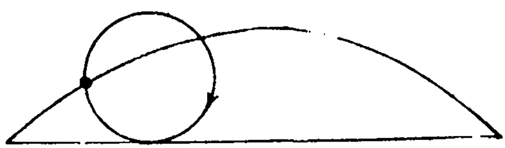
Từ năm 17 tuổi cho đến năm 39 tuổi. Patxcan đã sống phần lớn những ngày trong đau khổ : ban ngày thì bị rối loạn tiêu hóa, ban đêm thì thường xuyên mất ngủ. Nhưng ông vẫn làm việc không ngừng.

Năm 1648, Patxcan lại nổi bật lên trong lĩnh vực khoa học. Ông nghiên cứu công trình của Torixenli về áp lực khí quyển. Bằng các thí nghiệm với phong vũ biểu, ông đã chứng minh những tính chất về áp lực khí quyển mà lúc đó chưa ai biết, tuy rằng ngày nay những tính chất này trở thành phổ biến đối với chúng ta. Anh rể của ông đã mang một phong vũ biểu lên đỉnh PuydơĐôm để ghi lại mực cột thủy ngân giảm xuống khi độ cao càng tăng, áp lực khí quyển giảm. Sau này khi trở về Pari, Patxcan đã cùng chị mình làm lại thí nghiệm đó.

Sau khi hai chị em Patxcan và Jăccơlin trở về Pari, thì ông bố cũng trở về với các con vì bây giờ ông đã là cố vấn của nhà nước. Trong thời gian này, Đêcac đến thăm Patxcan và tỏ ra không tin rằng Patxcan có thể viết nổi cuốn sách về cônic khi mới 16 tuổi và tham dự những buổi tranh luận khoa học hàng tuần lúc mới 14 tuổi. Việc này thể hiện trong thư của Đêcac gửi cho Mecxen. Do đó mà hai người không ưa thích nhau.

CÂU CHUYỆN VỀ ĐƯỜNG CONG XICLÔIT

Một câu chuyện khác *về đường cong xiclôit* (H.29). Đường cong này tạo nên do chuyển động của một điểm trên một đường tròn lăn trên một đường thẳng, như là một bánh xe quay trên một bánh xe phẳng (đường thẳng được coi như đường tròn với bán kính bằng ∞). Đường cong xiclôit này đã được nhiều người



Hình 29

đề cập tới như : Galilê đã đề nghị xây các vòm cầu theo dạng xiclôit, Huyghen đã sử dụng xiclôit trong khi chế tạo các đồng hồ quả lắc. Một đêm (1658) khi bị bệnh đau răng làm khổ, Patxcan thử tập trung tư tưởng suy nghĩ về đường xiclôit này để quên đau. Lạ thay, rõ ràng ông đã khỏi đau trong đêm hôm đó. Ông tin rằng đây là « ý của Trời » nên suốt 8 đêm liên tục ông đã nghiên cứu về hình học của đường xiclôit và tìm ra được khá nhiều vấn đề lí thú về đường cong này.

Nhưng trong năm này (1658) ông lại bị đau đầu liên tục kèm theo mất ngủ. Suốt 4 năm trời như vậy, ông phải nhường ngôi nhà mình ở cho một gia đình nghèo rồi về ở với chị Gilbectơ. Ngày 19 tháng 8 năm 1662 ông đã vĩnh biệt cõi đời vào lúc 39 tuổi. Cuộc giải phẫu sau đó đã chứng tỏ ông bị một vết thương trầm trọng ở óc. Thế mà Patxcan đã cống hiến không mệt mỏi cho toán học, vật lí và văn học Pháp trong một số tác phẩm văn học nổi tiếng.

TAM GIÁC PATXCAN

Những người sáng lập ra lí thuyết xác suất là Patxcan và Fecma. Trong những bức thư trao đổi với nhau giữa hai người vào năm 1654, người ta thấy rằng cả hai đều có công ngang nhau trong việc sáng lập lí thuyết này ; những vấn đề họ giải quyết chỉ khác nhau về chi tiết nhưng giống nhau về những nguyên tắc cơ bản.

Liên quan với những vấn đề giải tích tổ hợp và xác suất Patxcan đã sử dụng tam giác số học sau :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Trong tam giác này những số thuộc mỗi dòng bắt đầu từ dòng thứ ba được suy từ dòng trước bằng cách viết 1 rồi cộng với những cặp liên tiếp các số từ trái sang phải, chẳng hạn $5 = 1 + 4$, $10 = 4 + 6$, $10 = 6 + 4$, $5 = 4 + 1$. Những số của dòng thứ n là những hệ số của khai triển nhị thức Niutơn $(1 + x)^n$. Ví dụ với $n = 3$ ta có $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ (dòng thứ 4), với $n = 4$ ta có $(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ (dòng thứ 5).

Tam giác này gọi là *tam giác Patxcan* có dạng một « tam giác » vô hạn về phía dưới. Tam giác này có một số tính chất đáng chú ý sau đây :

— Hai cạnh bên của tam giác gồm toàn số 1

— Tam giác đối xứng đối với trục giữa

— Nếu một số không thuộc cạnh bên của tam giác thì nó là tổng của hai số ở dòng trên và đứng gần nó nhất.

BÁNH XE HAY MÁY TÍNH PATXCAN

Đầu năm 1610, khi gia đình chuyển về Ruăng, bố Patxcan chuyển sang làm công tác tài chính. Patxcan đã phải giúp bố trong công việc tính toán cồng kềnh, phức tạp. Cuối năm 1640, ông nảy ra ý định *chế tạo máy tính*. «... mỗi trục hay mỗi bánh xe ở thứ tự nào đó sẽ gắn với 10 chữ số, mỗi khi quay một vòng chúng sẽ làm chuyển dịch một số... ». Sau 5 năm lao động căng thẳng, ông đã chế tạo xong chiếc máy tính làm được bốn phép tính số học rất tin cậy mà nguyên liệu là gỗ, ngà voi, thau, đồng. Người thời đó gọi nó là « bánh xe Patxcan », thủy tổ của những máy tính ngày nay.

PITAGO

Pitago

Pitago sinh vào khoảng năm 580 trước công nguyên trên đảo Xamóc. Người ta biết rất ít về cuộc đời của ông.

Ông đi du lịch rất nhiều nơi. Ông đã sống ở Ai Cập trong 22 năm để học tập nền khoa học Ai Cập. Ông đã tới Babilon và sống ở đây 12 năm làm quen với những kiến thức khoa học của đất nước Babilon. Ông đã sang Ấn Độ tiếp xúc với nền văn hóa cổ ở đó.

Ông trở về tổ quốc khoảng năm 530 trước công nguyên và thành lập trường triết học. Trường này hoạt động được 13 năm.

Trường phái Pitago đã ra đời ở Italia. Trường phái này nghiên cứu nhiều vấn đề khoa học tự nhiên và cả triết học nữa. Trường phái này cũng đã đóng vai trò quan trọng trong việc phát triển khoa học thời cổ, đặc biệt là về số học và hình học.

Pitago là người tìm ra « *tỉ lệ thức vàng* »

$$\frac{A}{H} = \frac{R}{B}$$

trong đó H và R là trung bình điều hòa và trung bình cộng của hai đại lượng A và B. Điều này có vai trò lớn trong lí thuyết âm nhạc của Pitago.

Ở Babilon ông nghiên cứu không chỉ về lĩnh vực toán học mà cả về lĩnh vực lí thuyết âm nhạc và thiên văn.

PITAGO VỚI LÍ THUYẾT HÒA ÂM

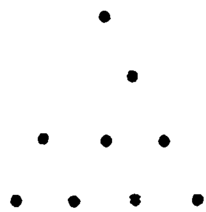
Nếu ta giảm chiều dài của dây đàn đi một nửa thì âm thanh sẽ tăng 1 bát độ (ôcta). Nếu ta giảm đến tỉ số 3 : 2 và 4 : 3 thì sẽ tương ứng với khoảng âm trình năm độ (ngũ độ) và ba độ (tam độ). Pitago cho rằng độ cao âm thanh của sợi dây phụ thuộc vào chiều dài của dây ấy.

Theo truyền thuyết, Pitago đi qua xưởng rèn, nghe các âm thanh có độ cao khác nhau do tiếng đập khác nhau của búa gây ra. Từ đó ông nghĩ rằng với dây đàn thì độ cao âm thanh tỉ lệ nghịch với chiều dài của dây ấy.

Với 3 sợi dây đàn ta có thể nghe được một hợp âm cân đối và dễ nghe nếu chiều dài của dây tỉ lệ với 6, 4, 3. Từ đó ông kết luận rằng mọi sự cân đối đều phụ thuộc vào các số, và số bao giờ cũng xác định tính chất của các vật và các hiện tượng.

Pitago cho rằng các khoảng hòa âm quan trọng nhất phù hợp với tỉ số của các số 1, 2, 3 và 4. «Tất cả là số», bản thân các số 1, 2, 3, 4 lập thành «Bộ bốn» nổi tiếng.

Về mặt hình học, bộ bốn biểu thị bằng «tam giác hoàn chỉnh», còn về mặt số học thì biểu thị bằng «số tam giác» 1 + 2 + 3 + 4 = 10 (H.30). Người ta kể lại rằng một hôm Pitago đề nghị một người bạn thử đếm các số. Khi người này vừa mới cất tiếng đọc: «1, 2, 3, 4», lập tức Pitago ngắt lời ông ta và nói: «Cậu thấy chưa, cái mà cậu gọi là bốn chẳng qua là 10 — tam giác hoàn chỉnh đấy».



Số tam giác

Hình 30

Và như vậy về thực chất khi nói đến các bộ bốn, các số tam giác, và quan hệ số trong các khoảng hòa âm thì chúng ta phải kể đến công lao của chính Pitago.

Trước khi chết, Pitago còn dặn lại học trò của mình tiếp tục nghiên cứu về âm nhạc và số học, đặc biệt là một dụng cụ âm nhạc «đàn một dây» khá độc đáo.

Lịch sử của dụng cụ âm nhạc đó như sau. Pitago chia cái thước thành 12 phần và căng một sợi dây đàn trên thước đó. Rút ngắn chiều dài dây đàn bằng cách giảm 12 khoảng chia thành 6, 8 và 9 tức là theo tỉ số 2 : 1, 3 : 2 và 4 : 3, ông đã nghe được âm thanh cao hơn 1 bát độ, ngũ độ và tam độ.

Các số 6, 8, 9, 12 được gặp hầu hết trong lí thuyết â của trường phái Pitago và những người hiện đang theo phái đó. Tất cả các tác giả này đều coi các trung tỉ như là trung bình cộng và trung bình điều hòa giữa cả tỉ 12 và 6.

Âm thanh cao nhất họ biểu thị bằng số 12, còn ân thấp nhất bằng số 6, nghĩa là không phải tỉ lệ thuận n lệ nghịch với độ dài của sợi dây. Phải chăng người ta l các số này dựa vào kinh nghiệm? Có lẽ điều đó cũng quan trọng. Vấn đề là ở chỗ đã xuất hiện được những q đúng đắn đối với các khoảng hòa âm, chẳng hạn 12 : 9 đối với tam độ và 12 : 8 = 9 : 6 đối với ngũ độ.

Điều mà Pitago đưa ra về việc tính các khoảng cá những gam trong âm nhạc đáng được chú ý. Đó là toàn âm nửa âm lớn (256 : 243). Thực tế những tỉ số này có thể c từ bát độ (2 : 1), ngũ độ (3 : 2) và tam độ (4 : 3) bằng phép chia liên tiếp:

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}, \quad \frac{4}{3} : \frac{9}{8} = \frac{32}{27}, \quad \frac{32}{27} : \frac{9}{8} = \frac{256}{243}$$

SỰ TÔN THỜ CÁC «SỐ THẦN LINH»

Trong một thời gian rất lâu loài người chỉ biết s tự nhiên, phân số, số hữu tỉ, chứ chưa có khái niệm v tỉ. Trường phái Pitago đã nghiên cứu hình vuông có cạ và nhận ra rằng đường chéo của hình vuông này không t thị bằng số tự nhiên hoặc phân số, từ đó họ nghĩ đến tại của một loại số mới.

Nhưng vì họ coi các số tự nhiên là cơ sở của mọi trên thế giới và gán cho mỗi số một sức mạnh thần bí không dám thừa nhận số mới ấy vì nó mâu thuẫn với triế tâm của họ.

Trường phái Pitago tôn thờ những chữ số và số vì họ có quan niệm thần bí về số. Trước khi vào nghe giảng bài, đồ đệ của Pitago đọc những câu kinh như sau: « Hãy bạn ơn cho chúng tôi, hỡi những số thần linh ».

Họ cho rằng: số 1 biểu thị lẽ phải;

— Số lẻ là số nam, số chẵn là số nữ;

— Số 5 biểu thị việc xây dựng gia đình vì là tổng của số nam đầu tiên và số nữ đầu tiên;

— Số 7 biểu thị sức khỏe;

— Số 13 được coi là điềm xấu, v.v...

Plutac đã viết như sau:

« Trường phái Pitago rất ghét số 17, vì 17 nằm giữa số 16 là số chính phương và số 18 là hai lần số chính phương; cả hai số này lại là các số « phẳng » duy nhất mà chu vi hình chữ nhật bằng diện tích của nó ».

Giải thích —

Giả sử các cạnh của hình chữ nhật biểu thị bằng số nguyên x và y, diện tích của nó là:

$$xy = 2x + 2y$$

Ta có thể biểu thị ẩn số y theo x:

$$y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}$$

Vì y là số nguyên nên x — 2 phải chia hết 4, như thế:

$$x - 2 = 1, \quad x = 3, \quad y = 6, \ xy = 18$$

hoặc $$x - 2 = 2, \quad x = 4, \quad y = 4, \ xy = 16$$

hoặc $$x - 2 = 4; \quad x = 6, \quad y = 3, \ xy = 18$$

Vậy ta có hai khả năng như Plutac đã nói ở trên.

SỐ HOÀN CHỈNH VÀ SỐ BẠN BÈ

Theo trường phái Pitago có một điều gì đó thật là kì diệu nếu một số bằng tổng các ước số thực sự của nó, chẳng hạn:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Họ gọi đó là những *« số hoàn chỉnh »*, chẳng hạn 4 số sau: 6, 28, 496 và 8128 và cũng nêu lên quy tắc tổng quát mà việc chứng minh đã có từ thời Ơclit.

Nếu tổng

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = p$$

là số nguyên tố thì $2^n p$ sẽ là số hoàn chỉnh.

Chẳng hạn $1 + 2 + 4 = 7$ là số nguyên tố thì $4.7 = 28$ sẽ là số hoàn chỉnh.

Để chứng minh điều này phải sử dụng công thức về tổng các số hạng của cấp số nhân

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

cũng có trong sách vở ở Babilon. Vì thế Pitago đã biết đến tổng này.

Các số gọi là Nicômac (nhà toán học cổ Hi Lạp thế kỉ thứ 1) là các số sau: $2(2^2 - 1)$, $2^2(2^3 - 1)$, $2^4(2^5 - 1)$ và $2^6(2^7 - 1)$. Số hoàn chỉnh tiếp theo là $2^{12}(2^{13} - 1)$. Lúc đầu số lớn nhất mới là $2^{126}(2^{127} - 1)$, bây giờ người ta đã tìm ra số hoàn chỉnh lớn nhất là $2^{2280}(2^{2281} - 1)$.

Hãy để ý đến hai số 220 và 284 chẳng hạn. Chúng được Pitago gọi là « số bạn bè » vì mỗi số bằng tổng các ước số của số kia:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284;$$

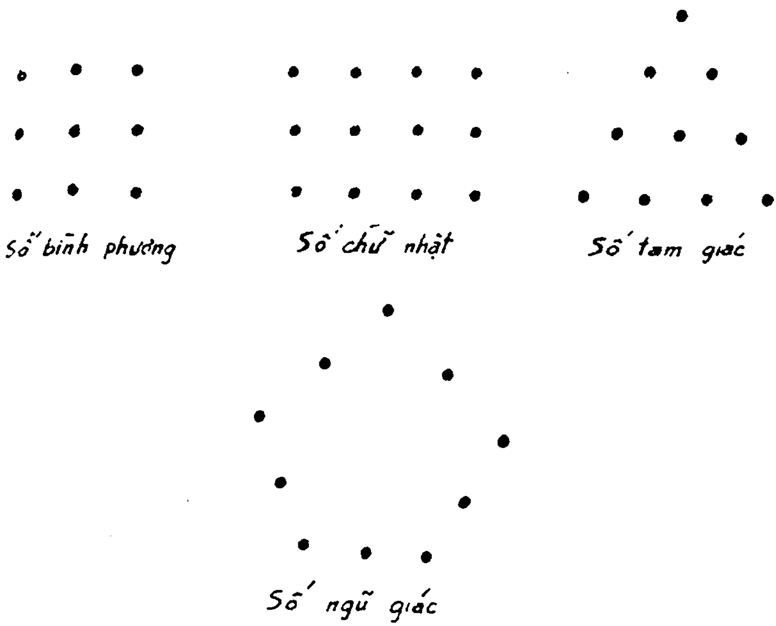
$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Một lần người ta hỏi Pitago thế nào là bạn. Ông trả lời: đấy là « tôi thứ hai » và nhắc lại các số bạn bè 284 và 220. Những điều như vậy ở Babilon ai cũng biết.

So với Ơclit, Nicômac (nhà toán học và triết học cổ Hi Lạp thế kỉ thứ 1) có nhiều quan điểm về số học giống với quan điểm ở Babilon hơn. Chẳng hạn Nicômac và các nhà toán học Babilon đã đặc biệt xét những số bình phương n^2 và số lập phương n^3, và trong các số hộp chữ nhật abc Nicômac đã xét riêng các số có dạng $n^2(n + 1)$ là số mà người Babilon đã dựa vào đó để lập ra nhiều bảng số.

Pitago và một số mệnh đề số học.

Nicômac đã biết các số tam giác $1 + 2 + \dots + n$, số bình phương n^2, số chữ nhật $n(n + 1)$, số ngũ giác, v.v... (H.31).



Hình 31

Những tính chất của các số này dựa trên tổng các số hạng của những cấp số cộng dạng

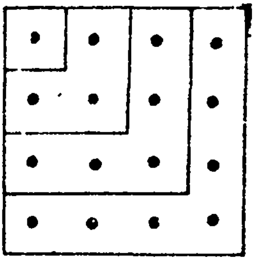
$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$ là số tam giác;

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ là số bình phương;

$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ là số chữ nhật;

$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{1}{2} n(3n - 1)$ là số ngũ giác.

Để chứng minh $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ bằng hình vẽ (II.32) ta chú ý rằng hình vuông có thể chia thành



Hình 32

l' ... hỏ ở góc và nhiều hình thước
t ... ta được tổng các số lẻ.

ổng các số hạng của
c ... ó được những công
t ... , của 2, của 3, ... số
l

$$1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 3^3, \text{ v.v...}$$

Từ đó suy ra ngay *quy tắc tính tổng các lập phương* đã có trong sách vở cổ Hi Lạp và cổ La Mã :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{2}n(n + 1)^2$$

Ta cũng tìm được công thức cùng loại về $1^2 + 2^2 + ... + n^2$ trong sách vở ở Babilon.

Pitago còn nêu lên *quy tắc để tìm nghiệm nguyên của* phương trình vô định

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad (+)$$

đó là $x = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$, $y = m$, $z = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$,
trong đó m là số lẻ.

Ta có thể chứng tỏ bằng hình vẽ rằng các giá trị của x, y, z ở trên thỏa mãn phương trình (+) bằng cách vẽ một hình vuông cạnh $x = \frac{m^2 - 1}{2}$ rồi vẽ thêm một hình vuông nhỏ cạnh 1, để có hình vuông cạnh $z = \frac{m^2 + 1}{2}$, tức là

$$\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + 2\,\frac{m^2 - 1}{2} + 1^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2$$

Diện tích hình vuông thứ nhất, hình vuông nhỏ và hình vuông lớn sẽ là x^2, y^2 và z^2 thỏa mãn phương trình (+).

Trong trường hợp đặc biệt $m = 3$ ta sẽ được tam giác vuông mà ba cạnh là 3, 4, 5 được gọi là *tam giác Pitago*.

ĐỊNH LÍ PITAGO VÀ SỐ PITAGO

Sự liên hệ giữa các cạnh của một tam giác vuông đã được nêu ra trước Pitago khoảng 1200 năm vào thời cổ Babilon. Nhưng Pitago đã có công chứng minh định lí đó và mở rộng phạm vi ap dụng của nó để giai nhiều bài toán về lí thuyết và thực tiễn. Định lí Pitago là chìa khóa để xây dựng nhiều định lí khác trong hình học.

Nhờ vận dụng định lí Pitago ta tìm được nhiều hệ thức lượng trong các hình. Việc tính cạnh của tam giác thường, đường cao, trung tuyến của tam giác, đường chéo của hình bình hành đều dựa vào định lí Pitago.

Ngoài ra trên cơ sở của định lí Pitago, các nhà toán học về sau xây dựng được một số các bài toán mới có ý nghĩa lịch sử rất lớn. Trước hết đó là việc tìm ra các số Pitago.

Số Pitago là gì? Sau khi các vệ tinh nhân tạo và những con tàu vũ trụ được đưa lên cao thì việc con người đi tới những hành tinh khác không còn xa xôi nữa. Vấn đề trên sao *Hỏa* có « người » hay không đã được tranh luận sôi nổi giữa các nhà thiên văn trong mấy chục năm gần đây và đã thu được một số kết quả nhất định.

Nhưng từ đó lại nảy sinh một vấn đề mới: làm thế nào để thông tin liên lạc bằng « tia tín hiệu » với loài « sinh vật cao đẳng » trên đó mà người ta tưởng tượng. Một viện khoa học ở Pari đã đặt ra một giải thưởng 10 vạn frăng để tặng thưởng cho người đầu tiên bắt được thông tin liên lạc với những « dân cư » ở các hành tinh khác.

Có một số người đã đề nghị lấy hình vẽ của định lí Pitago làm thành tia tín hiệu để truyền tin đến những sinh vật cao đẳng trên sao Hỏa cũng như trên các hành tinh khác. Phương pháp đó mới nghe tưởng như một trò đùa, nhưng nó lại rất có lí vì chân lí bao giờ cũng có tính thống nhất, khách quan và phổ biến.

Nội dung toán học của định lí Pitago có tính phổ biến cho đến nỗi không hẹn trước mà từ xưa đến nay mọi nước trên thế giới đều rất thống nhất với nhau trong việc phát hiện và công nhận.

Ngoài trường hợp số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông là 3, 4, 5 thì còn có những số nguyên nào có tính chất tương tự ?

Có, chẳng hạn :

$$5^2 + 12^2 = 13^2 ; \quad 6^2 + 8^2 = 10^2 ;$$

hoặc là bộ ba số (8, 15, 17) ; (11, 60, 61), v.v. Những số như thế gọi là *số Pitago*.

Thế có bao nhiêu số Pitago ? Chúng có quy luật hay không ? Thật ra số Pitago nhiều vô kể. Lấy một số lẻ tùy ý, đem số bình phương của nó chia làm hai số hiệu bằng 1 thì ba số đó sẽ là một nhóm số Pitago.

Ví dụ số 67, bình phương lên được $67^2 = 4489$, đem 4489 chia thành hai số 2244 và 2245 có hiệu bằng 1. Ta sẽ được nhóm ba số Pitago là 67, 2244 và 2245.

Ngoài ra còn có một phương pháp khác. Nếu cho hai số m và n ($m > n$) thì $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$ và $2mn$ sẽ là một nhóm số Pitago, vì :

$$(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$
$$= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Chẳng hạn với $m = 5$, $n = 4$ ta có :

$$m^2 + n^2 = 41, \quad m^2 - n^2 = 9, \quad 2\,mn = 40$$

Vậy 41, 9, 40 là một nhóm số Pitago.

MỘT SỐ CÔNG TRÌNH NGHIÊN CỨU VỀ HÌNH HỌC VÀ THIÊN VĂN

Pitago đã nêu lên cách dựng *khối đa diện đều*, nhưng chỉ mới biết cách dựng ba khối : lập phương, tứ diện đều và thập nhị diện đều. Còn hai khối bát diện đều và nhị thập diện đều thì sau do Têctet (cổ Hi Lạp 410-368 trước công nguyên) tìm ra.

Các mặt của khối thập nhị diện đều (12 mặt) là hình ngũ giác đều. Các đường chéo của ngũ giác đều tạo nên *ngũ giác sao*. Hình này biểu tượng của sức khỏe và cũng là *dấu hiệu để nhận biết những người của trường phái Pitago.*

Nơi đất khách quê người ai đó trong họ lúc sắp qua đời mà biết rằng không thể trả tiền cho người đã chăm sóc mình cho đến lúc mất thì ông ta bảo người này vẽ lên nhà một đa giác sao.

Thời gian trôi qua, nếu có một người thuộc trường phái Pitago nhìn thấy dấu hiệu đó thì chủ nhân của ngôi nhà sẽ được biếu một món quà đền ơn rất hậu. Để dựng ngũ giác sao (H.33) trường phái Pitago đã dựa vào tính chất sau đây của nó: mỗi một trong 5 cạnh chia mỗi cạnh còn lại theo trung và ngoại tỉ, tức là đoạn nhỏ $AK = a - x$ chẳng hạn và đoạn dài $KB = x$ có tỉ số bằng tỉ số của đoạn lớn x và cả đoạn $AB = a$.

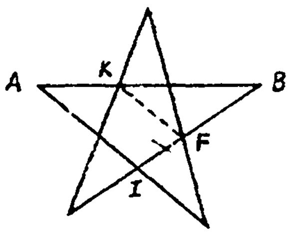
Ta có thể thấy ngay điều đó bằng cách xét hai tam giác đồng dạng AIB và KFB:

$$\frac{BF}{BK} = \frac{BI}{BA} \text{ hay } \frac{a - x}{x} = \frac{x}{a}$$

Tỉ lệ thức này dẫn tới phương trình

$$x^2 = a(a - x)$$

mà trường phái Pitago đã chứng minh một cách tài tình bằng phương pháp « đặt diện tích ».



Hình 33

Cuối cùng cần nhắc thêm *một số nghiên cứu sáng tạo về toán* của Pitago như: định lí về tổng các góc trong của một tam giác, bài toán về chia mặt phẳng thành những đa giác đều (tam giác, hình vuông, lục giác). Ông đã nêu lên phương pháp cơ bản kết hợp hình học với số học, chẳng hạn phương pháp giải toán về phương trình bậc hai, chứng minh bằng hình học rằng tổng những số lẻ liên tiếp bắt đầu từ đơn vị là số chính phương và mỗi số lẻ là hiệu các bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp ($2^2 - 1^2 = 3$, $3^2 - 2^2 = 5$,...)

Pitago quan tâm đến cả hình đồng dạng vì ông đã giải bài toán : « Cho trước hai hình hãy dựng hình thứ ba tương đương với một trong hai hình và đồng dạng với hình kia. »

Về mặt thiên văn Pitago đã cho rằng Quả đất là hình cầu nằm ở tâm của vũ trụ và đã biết các chuyển động riêng của Mặt trời, Mặt trăng và hành tinh, khác với chuyển động ngày đêm của những ngôi sao cố định.

Ông mất vào khoảng năm 500 trước công nguyên.

SALƠ

(MICHEL CHASLES)

Khi học đến *vectơ* ta vẫn thường vận dụng *hệ thức Salơ* $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, đối với ba điểm A, B, C trên một trục.

Salơ là nhà toán học Pháp sinh ngày 15-11-1793, là viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Pari (năm 1851), viện sĩ danh dự Viện Hàn lâm khoa học Pêtecbua (năm 1861), viện sĩ các Viện Hàn lâm Brúcxen và Beclin và là hội viên của nhiều hội khoa học ở châu Âu và châu Mĩ.

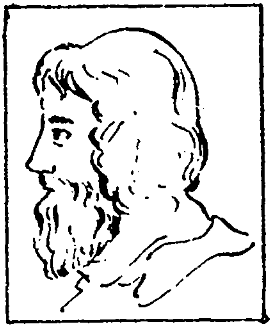
Sau khi tốt nghiệp trường trung học ông vào học Trường Đại học Bách khoa Pháp. Đến năm 1841 ông bắt đầu hoạt động khoa học và giáo dục, trở thành giáo sư môn chế tạo máy của Trường Đại học Bách khoa. Đến năm 1846 ông công tác tại Trường Đại học Xoócbon.

Trong toán học, Salơ đã nêu ra một hướng mới trong cuốn *« Giáo trình Hình học cao cấp »* (1852). Ngoài ra ông còn nghiên cứu về lịch sử toán học với cuốn *« Khái quát về lịch sử phát sinh và phát triển các phương pháp hình học »*, xuất bản năm 1837. Cuốn này đã được giải thưởng của Viện Hàn lâm khoa học Brucxen (Bỉ). Ông mất ngày 18 tháng 12 năm 1880.

TALET

CÂU CHUYỆN TALET NGÃ XUỐNG GIẾNG

Mọi người chúng ta đều biết đến *định lí Talet* trong hình học phẳng và trong hình học không gian. Talet là nhà toán học và thiên văn học cổ Hi Lạp sống khoảng năm 625 đến năm 547 trước công nguyên. Thời niên thiếu ông sống ở Ai Cập và đã học được nhiều kiến thức khoa học khác nhau. Trở về tổ quốc, ông đã tham gia thành lập trường phái triết học.



Talet

Talet là một trong bảy nhà thông thái mà về thực chất không phải là nhà bác học, họ là những nhà hoạt động chính trị, nhà làm ra luật pháp. Sự thông thái của ông mang tính triết học, ông đã đặt ra nhiều câu hỏi về nguồn gốc sự vật và đã nêu lên thuyết: « mọi sự vật đều xuất phát từ nước ». Platông có kể lại rằng: Một hôm trong khi quan sát ngôi sao Talet đã ngã xuống giếng. Một cô nô lệ rất đẹp đã cười vào mũi ông « ông ta muốn biết những gì xảy ra ở trên trời nhưng những gì ở dưới chân ông ta thì ông ta lại không nhìn thấy! »

Nhưng đừng nên dựa vào câu chuyện buồn cười trên để nghi ngờ rằng Talet là một con người đãng trí, toàn mơ chuyện viễn vông. Thực tế, ông hiểu rất rõ thế giới mà mình đang sống. Người ta kể lại rằng: ông đã kiếm được rất nhiều tiền bằng cách buôn bán dầu ô-liu rất giỏi, ông lại buộc mọi người phải đào một con sông rất lớn để có thể đưa một đoàn quân đi qua một cách thuận lợi. Trong mọi trường hợp ông đều có những lời khuyên xác đáng đối với đồng bào của mình trong cách xử thế.

Một ví dụ khác chứng tỏ sự thông thái của ông trong thực tế. Ông đã khuyên những người đi biển định phương hướng theo chòm sao Tiểu hùng tinh mà không theo chòm sao Đại hùng tinh.

Trong lịch sử thiên văn ông cũng là *người đầu tiên phát hiện ra nhật thực* ngày 25 tháng 5 năm 585 trước công nguyên.

Như vậy Talet không chỉ là một nhà lí luận, một nhà triết học mà còn là một con người có đầu óc dân tộc và đầu óc thực tế. Nói cách khác Talet là một nhà thông thái với đầy đủ ý nghĩa của nó.

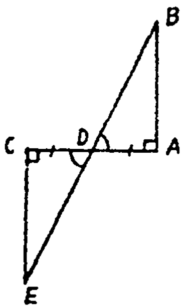
NHỮNG ĐIỀU TALET ĐÃ PHÁT HIỆN ĐẦU TIÊN TRONG HÌNH HỌC

Talet là người đầu tiên đã chứng minh rằng đường kính chia đường tròn thành hai phần bằng nhau.

Ông cũng đã nêu lên mệnh đề về các góc ở đáy bằng nhau trong tam giác cân.

Ông đã phát hiện ra rằng hai đường thẳng cắt nhau tạo thành những góc bằng nhau, nhưng không chứng minh.

Về định lí hai tam giác bằng nhau khi có một cạnh bằng nhau kề với hai góc bằng nhau từng đôi một, Talet đã nêu lên nhận xét có thể áp dụng định lí này để xác định khoảng cách giữa các con tàu trên biển cả. Ông đã làm như thế nào ?



Hình 34

Để xác định khoảng cách từ điểm A đến điểm B không thể tới được thì trên mặt phẳng kẻ đường vuông góc AC với AB, độ dài AC lấy tùy ý, rồi chia đôi AC tại D. Từ C kẻ đường vuông góc CE với AC theo hướng ngược với hướng của AB sao cho ba điểm E, D, B thẳng hàng. Như thế ta có độ dài CE bằng độ dài AB chưa biết (H.34).

Để chứng minh điều này phải áp dụng định lí về tam giác bằng nhau và góc đối đỉnh bằng nhau đã nêu ở trên. Đó là phương pháp mà Talet đã áp dụng.

Ông cũng là người đầu tiên nêu lên đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông và góc nội tiếp trong nửa đường tròn là góc vuông.

VIET

(FRANSÇOIS VIÈTE)

Học về phương trình bậc hai, chúng ta đều biết đến *định lí Viet* «Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì tổng và tích các nghiệm là:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 = \frac{c}{a}$$ »

Đối với phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ thì giữa ba nghiệm của nó ta có các hệ thức:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$$

Viet

Viet là nhà toán học người Pháp của thế kỉ thứ 15, sinh năm 1540 và mất năm 1603. Ông được mệnh danh là *người cha của cách dùng chữ thay số trong đại số*. Ông đã nghiên cứu sâu về phương trình đại số dưới dạng tổng quát và đã lập ra mối liên hệ giữa các hệ số và nghiệm của phương trình bậc hai như đã nêu ở trên.

Viet là một luật sư và nhà hoạt động chính trị. Ông đã từng giúp Vua Hăng-ri III và Vua Hăng-ri IV của Pháp với tư cách cố vấn.

Khi làm việc trong triều, Viet đã tỏ ra là một chuyên gia đầy tài năng trong việc giải mã các mật thư của quân Tây Ban Nha trong cuộc chiến tranh chống nước Pháp. Cần nhấn mạnh rằng chính nhờ các mật thư với cấu trúc các chữ số phức tạp mà quân đội Tây Ban Nha đã liên hệ được với những kẻ chống lại vua Pháp, thậm chí ngay trên đất Pháp. Những mật thư này hầu như không thể đoán được.

Sau nhiều ngày đêm vất vả tìm «chìa khóa» để giải các mật thư trên nhưng không kết quả, Vua Hăng-ri IV đã phải nhờ cậy tới tài năng của Viet.

Ông đã làm việc ngày đêm trong suốt hai tuần lễ để hoàn thành nhiệm vụ nhà vua giao cho. Viet đã đoán được bí mật của các chữ số Tây Ban Nha phức tạp đó. Sau đó Vua Hăng-ri IV đã coi ông là cố vấn tin cẩn.

Nhờ việc giải mã các mật thư mà quân Pháp đã liên tiếp chiến thắng. Quân Tây Ban Nha vô cùng ngạc nhiên không hiểu vì sao lại có đảo ngược thế cờ trong các trận đánh như vậy. Cuối cùng nhờ những nguồn tin bí mật quân Tây Ban Nha biết được rằng những chữ số trong mật thư không còn bí mật đối với quân Pháp và người có công trong việc giải mã là Viet. Quân đội Tây Ban Nha đã tuyên bố Viet là kẻ thù không đội trời chung và tuyên án vắng mặt nhà bác học tội bị thiêu trên dàn lửa. Tuy nhiên chúng không thực hiện được điều đó.

Viet chẳng những quan tâm đến đại số mà còn say sưa nghiên cứu cả hình học và lượng giác. Toàn bộ công trình nghiên cứu về toán của ông đã được xuất bản năm 1579.

Giống như nhiều nhà bác học nổi tiếng, Viet là người rất có năng lực làm việc. Trong phần lớn cuộc đời của ông, Viet đã hoạt động về pháp luật. Về toán ông say mê nghiên cứu các tác giả thời cổ và có thể ngồi tại bàn làm việc suốt 3 ngày đêm.

MỤC LỤC

DANH NHÂN TOÁN HỌC

In 5 000 bản
khổ 14,5 × 20,5cm,
tại Xí nghiệp in số 4,
Thành phố Hồ Chí Minh.
In xong và nộp lưu chiểu
tháng 7 năm 1989.

Giá : 700đ